TONGSU SHUXUE MINGZHU YICONG



通俗数学名著译丛

SHUXUE LÜXINGJIA
MANYOU SHUWANGGUO

[美]卡尔文·C·克劳森 著
袁向东 袁钧 译
上海教育出版社

数学旅行家：漫游数王国

责任编辑 叶中豪

数学旅行家：
漫游数王国
SHUXUE LÜXINGJIA
MANYOU SHUWANGGUO



ISBN 7-5320-7883-3/G・7972
定　价：（软精）18.20元

数学旅行家：
漫游数王国

[美]卡尔文·C·克劳森 著　袁向东 袁钧 译 ● 上海教育出版社

$\pi = 3.14159265358979$

图书在版编目（CIP）数据

数学旅行家：漫游数王国／（美）克劳森著；袁向东，袁钧译. —上海：上海教育出版社，2001.12
（通俗数学名著译丛／史树中，李文林主编）
ISBN 7-5320-7883-3

Ⅰ.数… Ⅱ.①克…②袁…③袁… Ⅲ.数—通俗读物 Ⅳ.O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第088426号

Calvin C. Clauson

The Mathematical Traveler

Exploring the Grand History of Numbers

Plenum Press

通俗数学名著译丛

数学旅行家：漫游数王国

［美］卡尔文·C·克劳森 著

袁向东 袁钧 译

上海世纪出版集团 上海教育出版社 出版发行

（上海永福路123号 邮政编码：200031）

各地新华书店经销 上海新华印刷厂印刷

开本850×1156 1/32 印张10.25 插页1 字数241,000

2001年12月第1版 2001年12月第1次印刷

印数1—5,150本

ISBN 7-5320-7883-3/G·7972 定价：（软精）18.20元



数学,这门古老而又常新的科学,已阔步迈进了21世纪.

回顾过去的一个世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位.数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献.同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志.因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学.现代社会对数学的这种需要,在来来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面,20世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路.面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步.这样,提高数学的可接受度,就成为一种当务之急.

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础.随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视.早在60年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今.改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一

个重要的环节和迫切的任务.为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的宏伟工程贡献力量.丛书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述,基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系.

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气.在这样的情况下,上海教育出版社按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的.

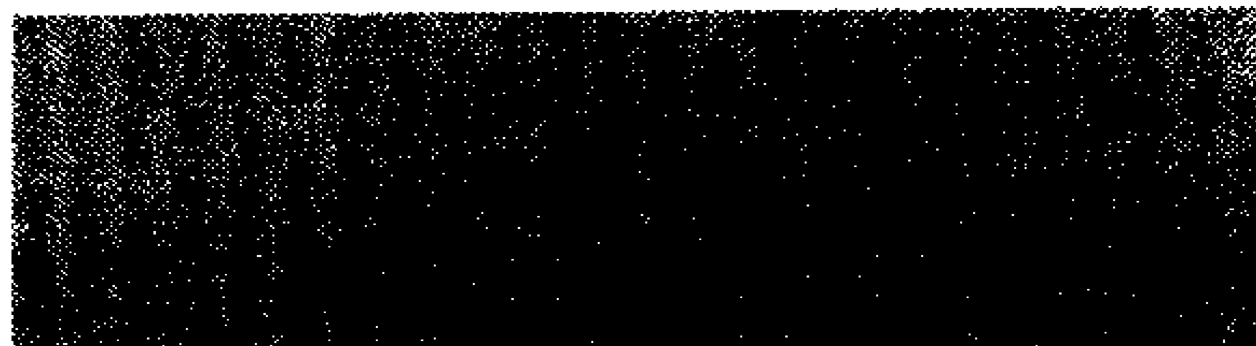
像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见.值得高兴的是,这项工作从一开始就得到了数学界许多人士的赞同与支持,特别是数学大师陈省身先生两次为丛书题词,使我

们深受鼓舞.到目前为止,这套丛书已出版了13种,印数大多逾万,有的已经是第四次印刷,这对编译者来说确是令人欣慰的信息.我们热切希望广大读者继续关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》出版获得更大的成功.

让我们举手迎接数学科学的新的黄金时代,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

2001年8月

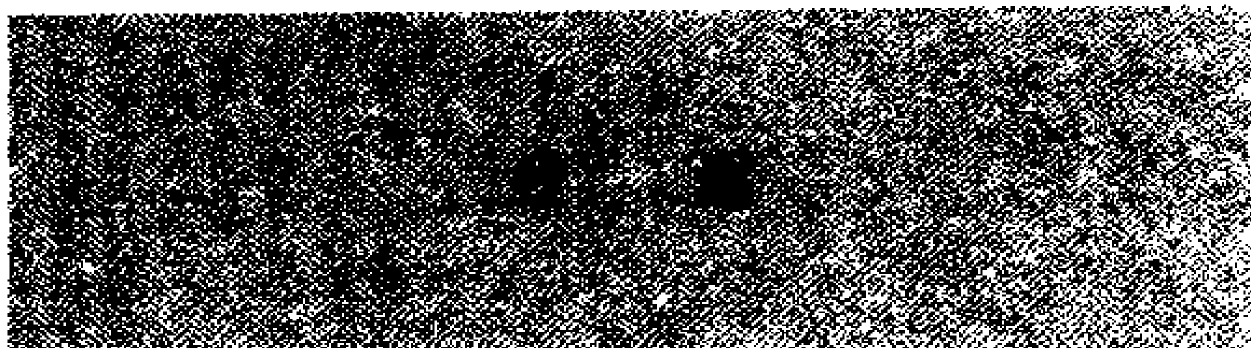


“数”(shù)，似乎是人们司空见惯的东西，“数”(shǔ)几乎是人人都掌握的一门最简单不过的技能.可是你想过没有：在物质世界中存不存在抽象的数？我们祖先是怎样创造(发现?)自然数的？为什么在一段很长的时期里许多学者拒绝负数？为什么自古以来，总有一些数学家就是不接受无理数？……数学旅行家循着历史的足迹“拜访”了众多的凡人与智者，试图探索在数的发展道路上隐藏的秘密，从而对上述问题作出解释.对数感兴趣的人不妨跟着本书去做一次旅行，去领略数王国的奇闻与美景.

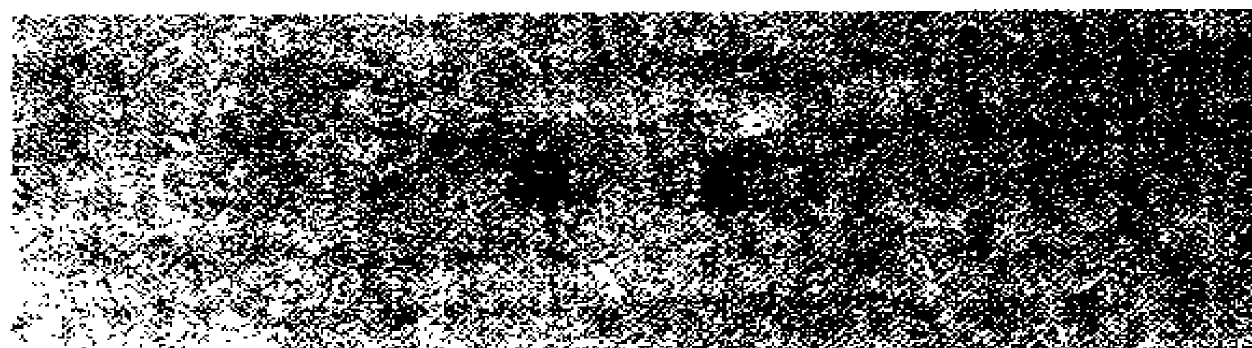
本书导言部分、第1章至第7章由袁钧翻译，其余部分由袁向东翻译.最终由冯绪宁教授审阅.

译　者

2000年11月



本书的出版得到了很多人的帮助.我要特别感谢我的那些在一起工作的朋友,他们耐心地阅读了手稿并提出了不少宝贵的建议,他们是玛丽·爱德华兹(Marie Edwards),布鲁斯·泰勒(Bruce Taylor),琳达·谢泼德(Linda Shephard),菲利斯·兰伯特(Phyllis Lambert)和布赖恩·赫伯特(Brian Herbert).我还要感谢犹他大学哲学系和数学系的教授,他们在教学中的认真与献身精神,使我热爱上了数学.



这是一本关于数的书.但本书并不仅仅讲述正经八百的数学.数学确实要研究数,同时,数的应用跟人类的经验与感受交织在一起,以致谈论数的方方面面将深入触及大量人类本性中非常神秘的东西.本书确实包含数学的内容,但也涉及人类学、生物学、心理学、解剖学、历史学和哲学.

人类一直被称为“使用工具的猿”,“使用火的猿”和“会说话的猿”.然而应该更恰当地称我们为“会计数的猿”.数和计数渗透进我们的文化,无处不在.如果你愿意,不妨设想一下,没有任何数或计数的社会是什么样的.我们跟数已经充分协调一致,可以用它来计量我们生活中的每一种现象.我们在住的街道旁标上门牌号码,我们彼此打电话要用到数——电话号码.我们的货币,还有我们的日历和钟表都是以数为基础的.今天早晨我醒来后翻身看了看数字式钟,它告诉我是6:45.我想起今天是17号,这提醒我必须付110美元的汽车款.当我吃早饭时,我从收音机的97.3兆赫的频道中听到股票市场上升了14点.我的一天(其他人也一样)就这样开始了.为了在现代社会中生活,我们得依靠数.

经济、我们的技术和科学全都依赖于我们对于数的使用,这种依赖性反映在我们早早地就向孩子们介绍数;在我们教他们做的第一批事情中,有一件就是怎样数到10.当有人提起数学 [1] ——数的研究时,甚至是最初期的入门,成千上万的美国人会感

到战栗."这太枯燥了,"他们抱怨说,"太困难了——全是些符号."但他们当中有些人去拉斯维加斯通宵达旦地玩一种数字相加的游戏——二十一点牌戏.或者,他们玩掷数游戏——一种掷双骰子赌博.也许他们会呆在家里玩"独占游戏",这种游戏要求他们把两枚骰子上的点数加在一起,然后计算该走多少步.如果他们正好走到别人的领地中,他们必须算出租金数.如果该地产是无主的,他们要拿出足够的钱数买下它.整个游戏就是用数字加加减减,用数字作计算.人们都喜爱数.有时他们宣称正规的数学索然无味,但事实上,无论是玩游戏、预支政府支票或玩股票,人们很喜爱数.

如果我们确实对于数有一种神秘的嗜好,那么看来大家会喜欢这本书.我们从研讨自然数开始我们的冒险——那是些我们首先要学会去数的数,也就是一、二、三、四,等等.所谓的"等等",意思是我们可以永远地数下去而绝不会到达最后一个数.

自然数是人类发现的第一种数.他们用这种数所做的第一件事是数(shǔ).在第1章里,我们将给计数下个定义,然后研究人脑中实施计数的那一部分.接着,我们将考虑计数与数有了多长的历史,它们最初是如何使用的(第2章).在第3章,我们将考虑是否还有其他物种也会计数.在第4章中,我们会看到最早的农夫所使用的数,以及美索不达米亚人和埃及人使用的最早用文字记录的数.然后,我们将回顾中国人和美洲土著人早期对于数的贡献(第5章).接下去我们将弄清楚古希腊人首先遇到但在其后两千多年没有解开的一个大秘密——这秘密最终导致了奇妙的无理数.在第7章,我们将介绍负数及我们现在使用的印度-阿拉伯数字.之后我们准备看一看无穷大的概念以及这一概念如何影响了我们对于数的信念(第8章).至此,我们也将 2] 随着数的演进充分解开无理数这个秘密(第9章).然后我们将充分发挥想像力并去发现一些奇妙的超越数,例如 π——这些数都相当奇特,对于每一个这样的数,我们都不能把它完全写下

来(第10章).接下去我们将研究一种全新的数,即复数,它们在科学和工程中被广泛使用(第11章).跟着出现的是我们介绍的最后一种数——超限数(第12章).在第13章中,我们停下来考虑一些了不起的能嘎扎嘎扎地咀嚼数字的怪物.据此,我们还将准备从哲学角度考虑一下数(第14章).在最后一章,我们将回顾20世纪的贡献,考虑数学在21世纪将走向何方,从而结束我们的旅行(第15章).

自然数与我们的文化联系得如此紧密,以致在研究它们时,我们实际上看到了人类历史的缩影.这是一段充满了惊异、奇妙和欢乐的历史.

尽管我们中的大多数人一直对于数的重要性满不在乎,但随着时光的流逝,一些人已经认识到数所起的作用.在公元前四百多年之前,一位名叫塔兰托的菲洛劳斯(Philolaus of Tarentum)的希腊人说过:

> 实际上,凡能被了解的东西都有一个数与之对应,因为没有这些[数]就不可能用心智领悟和认识任何事物.[1]

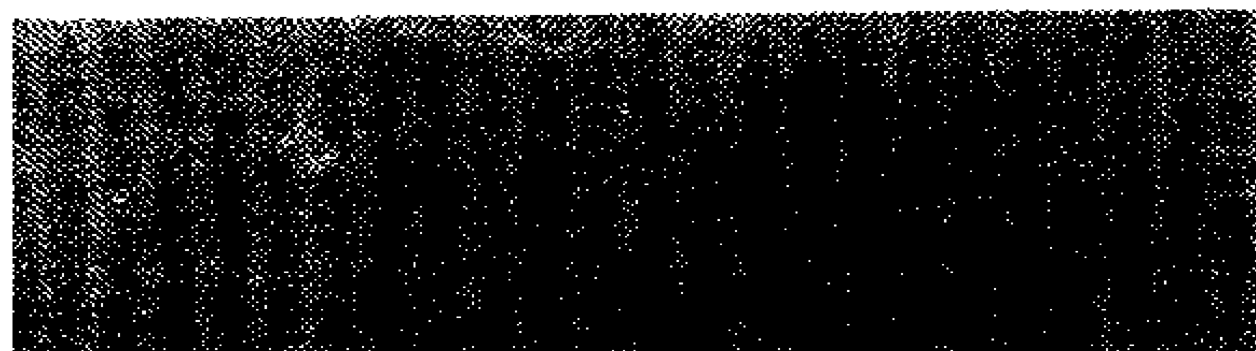
伟大的希腊哲学家柏拉图(Plato)教导说,数不仅在我们的世界中占据中心地位,而且还能引导我们走向真理本身.在写他的老师苏格拉底(Socrates)和一位朋友格罗孔(Glaucon)的对话时,柏拉图表述了雅典人对数的看法:

> 苏格拉底:一切算术和计算都必须跟数有关吗?
> 格罗孔:是的.
> 苏格拉底:它们看来能把心智引向真理?
> 格罗孔:是的,以一种非凡的方式.[2]

那么本书的论点是什么？阅读这本关于数的书，我们又想对我们自身增加什么理解呢？本书展示了：数，因而数学，是我们本性的构成要素；没有数，我们就不能发挥人的功能．[3]

相反的论点很简单，但不幸的是很多美国人都持有这种观点：我们大多数人都在计数，在绝对必要时做着加法或减法，但广而言之的数学却是大学象牙塔里的那些长胡子老者从事的神秘勾当．它对我们的生活，对于我们的家庭或我们的职业并不那么重要．因此它对我们的打扰多于帮助．

本书将正视这些对立面．它将表明数学深深地埋在我们的机体内，以至不被察觉．这对帮助我们定义自身是有积极意义的．要是有一天我们能到其他遥远的太阳系旅行，去访问其他高智能的生物，他们可能会问"你们是谁？"我们将骄傲地说："我们是计数器，我们了解数．"[4]



导言



计数与数在人的自然本性内隐藏得有多深？计数是我们的脑在充分进化后所获得的小小技能吗？它是完全依赖于文化学习的吗？或者，计数是深埋于脑中的“有线硬件”的功能？计数真的对人类那么要紧，以至成为我们遗传基质中的一个部分？换句话说，我们到底是怎样计数的？

词 汇

在开始我们美妙的冒险旅行之前，让我们先花几分钟时间来谈谈词汇.每当我们想更精确地交流思想时，总会促使我们去定义新的术语或以更确切的方式重新定义老的术语.这能增进人们之间的理解，无论他们从事的是特殊的技艺、技术还是科学工作.然而，专业化的词汇也可能把有兴趣学习新技术或科学的人拒之门外.一些自己开业的人，如医生、精神病医生和律师，已经遭到谴责，他们各自制造一种全新的语言，目的只是不让爱管闲事的局外人接近他们的行业.我们不会对此说三道四.

数学确实包含着大量专门的定义以增加交流的精确性.我们的做法是在需要的时候提供那些新的术语，但我们将总是去学习那些简单的而不是复杂的或绕着弯的陈述方式.通常，新概【5】念并不难学，只是奇特的新词汇让人感到陌生.我们的目的是增加大家对数的理解，而不仅仅是学一些新词.当引进一个数学术语时，我们将给出一个简短易懂的定义.我们不会引入不是必须

的新词.

自 然 数

为了对什么是数有个正确全面的理解,我们首先研究自然数.自然数是我们最熟悉的数;是我们数(shǔ)数时用的数:一、二、三、四、…….省略号意味着我们能继续数下去,想数多大都行;用数本身来数(shǔ)是没有极限的.当然,由于我们只能在时间允许的范围去数,所以在现实中数出的数是有限的.有时自然数被叫做"整数"或"正整数";尽管这三个说法等价,我们通常还是喜欢叫它们是"自然数".

对于数,有三种基本用法.当我们想知道一组对象有多少个时,我们说的是基数(Cardinal number).一组对象的汇集被数学家们称为一个集合.因此,如果我们有一篮苹果共十一个,这组苹果的基数即11,这一组十一个苹果就是一个集合.集合中的单个对象叫做元素(element).因此,每个苹果就是这个苹果集合中的一个元素.

基数:表明一个集合中有多少单个对象的数.

集合:一组对象的汇集.

元素:集合中特定的单个对象.

你很容易看出基数这个概念对人类是多么有用.它回答这种问题:停车场内有多少辆汽车?在我的钱包里有多少美元?我的表弟威尔福德和他的太太马维斯有几个孩子?所有这些问题的答案都是基数.

下面我们来给数的第二种用法下定义.它是显示事物的相[6]对次序的.当你去咖啡馆买你特别喜欢的波希米亚咖啡时,你发现排着长队.要等多久才能轮到你呢?你拿到一个号写着47,你还注意到叫号牌上显示:"现在轮到35号."这里,数47并不告诉你一个集合里有多少个对象,但让你知道你相对于其他人所处的位置.在你前面还有十二位顾客.于是,47展现了在一个

数的序列中你的序号.这一类数就是序数(ordinal number).

我们通常用到很多序数.你的街址就是序数.这不是指房屋、人或任何集合中元素的个数,而只是指明你的房子在城里你所在的街区中相对于其他房子的位置.只要你在讲表明事物的相对位置的数,你就在谈序数.

序数:指明一集合中某一元素的相对位置的数.

数的第三个用法在于进行简单的识别.它们是所谓的标码数(tag number).它们既不是用来数(shǔ)集合中元素的个数,也不显示其相关次序.你的电话号码就是一个标码数.它既不需要确认由电话号码组成的集合中有多少个电话号码,也不用显示你的电话号与其他电话号的相对位置.社会安全号是标码数.绝大多数公共汽车线路数与飞机航班号也是标码数.然而我们并不真的对标码数感兴趣,因为这类数仅仅起到名字的作用.在任何情况下,一个名字总是可以用数来代替的.因此,下面的内容我们只涉及序数与基数,而不去管标码数.自然数可用作基数和序数.之所以能用作基数是因为他们能标示集合中元素的个数.它们能用做序数是因为每一个自然数在数的序列中都有唯一指定的位置.5总是位于4之后与6之前.因此,自然数是有序的.

计数的几个特征

从童年时代起,我们就被教会使用自然数了.父母教我们数到十,通常是这么做的:一个接一个地掰着手指,一、二、三、……每当说出一个数之后,父母就去掰下一个手指.我们觉得这是很【7】开心的游戏并很快学会了模仿他们.不久我们就能按正确的顺序说出表示数的词:一、二、三、四、…….然而,仅仅按正确顺序说出这些词还不是计数.计数需要知道得更多:它要我们回答"多少个"这样的问题.我们的父母在这方面也帮助我们.你妈妈把三块积木堆放在你面前."宝贝,是多少? 多少块积木?"她尽力使你数出它们.最初你可能只会把它们弄得东一块西一块的.

但你最终学会了.在你数的时候,你能指着东西说出其正确的数的名字.你弄清楚了你说出的最后的名字正是你妈妈想要你说出的“数”.你理解“多少”这个概念了吗?如果你还很小,大概不理解.然而你上学之前的某一天,你好像理解了“众物”(manyness)的集合.尤其是当你姐姐说她没有拿走玩具兵时,你却知道少了一个,因为你已经数过它们了.

说到这里,我们应该停下来对计数这个词提供一个附加的词.你可能学会了做具体的计数.你会掰着一个个手指说出正确的数词.现在我们引入一个数学家所心爱的术语——映射(mapping).当你数的时候,你让一个手指确切地代表一个词.你不会让两根手指代表同一个词,或是掰着同一个手指说出两个词.这就是一对一的方法.每根手指得到它自己的一个数词,而且仅有一个.数学上管这叫一一映射.这是我们计数过程的要害所在.

一一映射(one-to-one mapping):对一个集合(如,手指)的每一个元素,确切地指定第二个集合(如,数词)的一个且仅有一个元素与之对应.

在你童年的某一个时期,大约是两岁到五岁之间吧,你在思维方面有了巨大的长进,因为你学习了数学中你将碰到的两个最难的概念.你学会用汇集或集合来想像事物,并理解了每个集合里包含的众物,它由基数来确定.你知道不同的集合可能有同[8]样的基数,也可能有不同的基数.你学习了计数的方法从而能发现集合的正确的基数.这本身也构成了一个由技能组成的汇集,你觉得奇怪吗?

现在我们可以来问那个基本的问题了:我们怎样计数?用的是什么样的思维过程?大脑的哪一部分被催活了?脑中是否有一个特殊的区域来产生这种活力?这是纯粹通过学习得到的技能还是我们继承来的遗传技能?我们在计数时使用了词汇,那么语言对计数来说是必须的吗?

一个完整的计数过程依靠三项活动.首先我们想要去回答“有多少”这个问题.我们已经确定了一个集合并希望知道其中有多少事物.下两项活动是同时发生的.我们依次用手指触着或指着集合中的每一个元素并说出适当的表示数的词.指点与说出正确的数词当然就是我们所做的映射这一行为.这一行为完成时我们即说出了最后的数词——我们寻找的那个基数,于是我们的计数过程就完成了.因此,我们需要做的是(1)想知道有多少,(2)依次触摸或指点,(3)依次说出数词.看来,大脑中用来计数的那些部分包括:负责进行抽象的区域以及实现持续的运动功能和语言功能的区域.

有时我们并不真的用手指来指点,而只用眼睛从一个物体移向另一个物体.不过,移动眼睛也是持续的运动.在这种情况下我们只是中断了指点与触摸而继以眼睛的移动.有时我们并不说出数词而只是想着它们.

我们是否已经确定了对于计数而言所必须的最少的活动?如果真是这样,我们便可以假定计数是依赖于语言的,因为在我们能对任何东西计数之前必须学会数词.因此,计数可能是在有了语言之后(或者说不在其前)获得的一种技能.

是否存在一种不依赖语言的计数方式呢?如果存在,那么这种计数的方式可能比现代快速的说话能力还要古老,因此它可能并不依赖于大脑中与语言有关的区域.

卡尔·梅宁格(Karl Menninger)的《数词与数的符号:数的文化史》一书,在理解早期的计数与数等方面作出了经典贡献.[1)] 在他的书中,梅宁格指出非语言的计数不仅可能,而且对于早期 [9] 人类来说几乎肯定是有的.直到20世纪,一些原始部落只使用两个数词:一和二①,对其他的都一概叫做“多”.然而,这些部落

① 我这里用“原始”一词,表示这些部落文化的状态,而不是指其成员的身体特性,所有生活在今天的人都是现代人类.

中的个体通常要记录财产集合中元素的数量.仅有数词“一”和“二”不能数清三十头牛,十一条狗或十六篓谷物.弄清和记录财产——特别是当财产中包括食物、遮蔽物或防备敌人的安全护具——的数量的需要,强烈地刺激了人们要记录集合的基数.如果一个不诚实的邻人在夜里偷了你的牛而你一无所知,这无异于把自己和你的家人置与挨饿的危险之中.

梅宁格指出,有一些原始部落,像斯里兰卡岛上的瓦达(Wedda)部落,不通过将数词与元素间的映射来计数,而是通过用小棍或其他物品跟元素间的映射来计数.因此,在数一批椰子组成的集合时,瓦达部落人为每一只椰子分派一根小棍.数完后,他手中的一束棍子就是椰子“数”.他不能告诉你他有多少椰子,因为他不知道表示这一束棍的基数的数词,但他能拿出这一束小棍向你“展示”那个数.

对此,你可以说瓦达部落人并不是真正在数椰子.你可能坚持认为,真正的计数应该理解数的序列(一,二,三,四,……)并知道如何用它们去计数.但是对于瓦达部落人来说,我们把他们的行为视作真正的计数还是某种“小棍计数”是无所谓的.他们关心的是用小棍来映射椰子而得到这批椰子正确的基数,因而回答了“有多少?”的问题.通过回答这个问题,他能够说明他所拥有的椰子,牛及其他财产.他通过并不需要用语言的巧妙技能完成了这一切.

[10]

这种简单的“小棍计数”需要什么技能呢? 第一,部落人应该面对集合有“多”这个抽象概念.也就是他看到了不同的物项(例如单个椰子或其他事物)的汇集并认识到它们有一个共同的性质.他认定它们是一些对象的集合并想说明其“多”的性质.第二,他应设计出一组巧妙的行为把每一根小棍和每一只椰子之间形成映射.这一系列的步骤只有全部完成之后才有意义,因为这一过程中任何的中断都会导致椰子的错误基数.所以他不是只设计如何开始这一系列映射,而是从一开始就设计好去完成

这一系列步骤，以到达终点并给出他想要的结果.

各种计数活动是在大脑中的什么地方进行的呢？为了回答这个问题，只要说说小棍计数与现代计数两者都发生在人的意识活动中就很有吸引力. 找到意识活动处于人脑中的位置，你也就找到了计数的源泉. 然而，朝这个方向探索，我们很快就走进了死胡同. 事实上，确认我们所谓的意识活动跟脑中特定的位置相对应的研究已困扰了科学家许多年；在考察大脑受损伤的病例后，许多科学家已得出结论，大脑中没有一个单独的部分负责意识活动. 实际上，埃里希·哈特(Erich Harth)在他的《心智的窗口》(Windows on the Mind)一书中提出，意识活动是存在于整个神经系统的现象.

> 我们的感觉的直接性，以及孤立的皮质无力维持意识活动告诉我们：意识的范围超出了头颅，可能到达身体的表皮甚至更远.[2)]

由于意识活动的场所不是停留在一处，所以通过研究意识去寻找我们的计数技能是于事无补的. 我们需要做的是仔细观察大脑的结构并努力去发现我们的计数能力可能出自何处.

大脑如何进行计数

众所周知，大脑是我们的头盖骨内部多水分的一团组织，它负责控制我们的各部分机体，并为我们的思维提供根据地.【11】脑组织确实是一个糊状凝胶体，比水密度稍大一些，如果把它摆在桌上，可能在自身的重量作用下破裂. 脑中的主要细胞是大约 120 亿个神经元或神经细胞（图 1）. 120 亿是多大呢？神经元的数量比地球表面的人类的总数（55 亿）要多，但比银河系中的恒星数（1 000 亿）少，也比我们的国债（超过 4 万亿）少. 每个神经元由三部分组成：一个细胞体，一系列称为

树状突的分支纤维——从其他神经元接受电信号，以及一条轴突纤维——向外散发分支将细胞的电信号送到其他神经元. 就神经元之间的连接来说，单个的神经元能直接跟四千甚至五千个其他神经元交换信息.[3]

从脊柱往上，脑可以粗略地分为三个部分：脑干(brain stem)，小脑(cerebellum)和顶部的新皮层(neocortex)(图 2). 为了确定脑在计数方面的作用，我们将集中研究新皮层的部分，它是实行记[12]忆、学习和各种智力技能的场所，同样也是诸如视觉、听觉和语言功能等重要功能的驻在地. 新皮层的外表面叫做灰白质，它是由一百亿个神经元组成的薄薄的一层. 灰白质中紧密地布满神经元，一立方毫米内(与大头针的针头体积相仿)含有三万到十万神经元体. 皮层被一条大纵沟从前至后分成两半. 有两千万个轴突的称为胼胝体的纤维束，则把新皮层的两半连结在一起.

假如我们能指着脑上的某个小突起说："这就是你的计数能力所在之处"，那就太好了. 但脑是一个极端复杂的器官，我们根本无法做到这一点，这既是不幸又是万幸. 部分脑功能看起来集

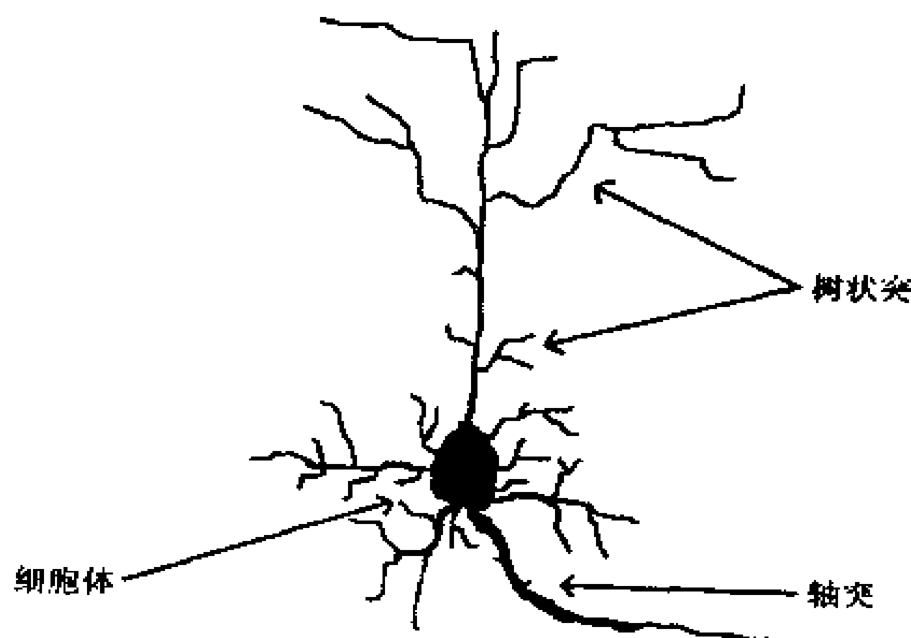


图 1 人脑的神经细胞包括细胞体，接受其他神经元信号的树状突和把信号传递给其他神经元的轴突.

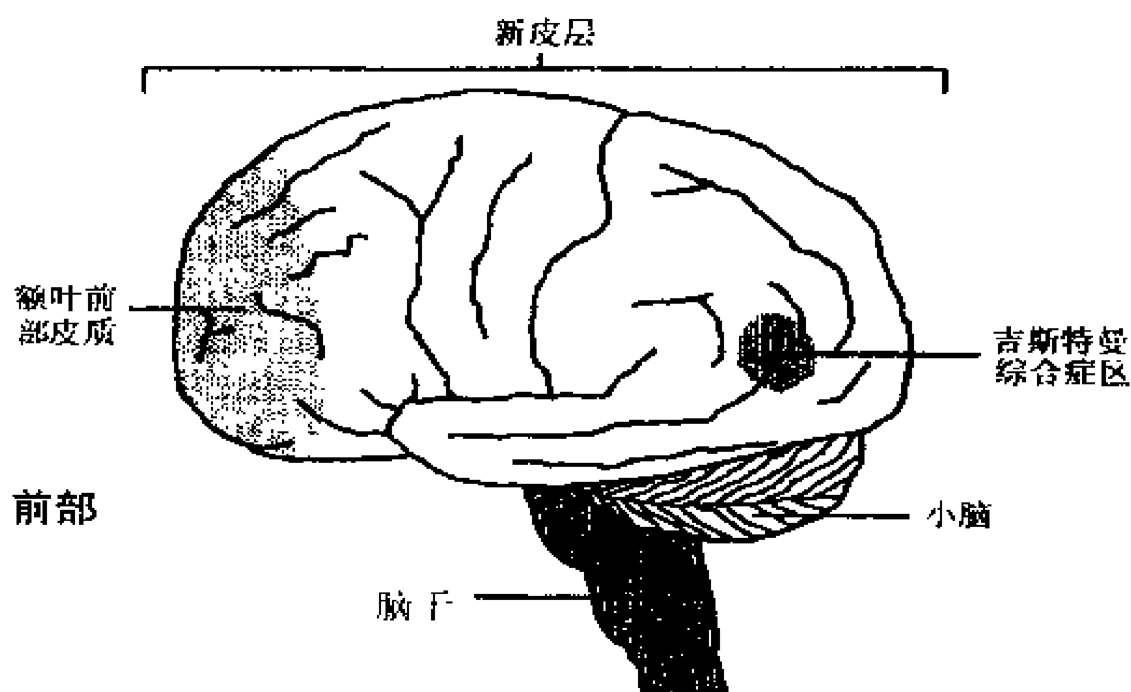


图 2 人脑.额叶前部皮质和吉斯特曼综合症区都与计数有着紧密的联系.

中在一些特定的区域,而其他功能似乎分布在新皮质中的很大的区域内.例如,研究表明,许多记忆与脑的某些特定区域联系 【13】 在一起,而有些记忆则较分散,它们会因受到伤害而削减却又不会完全失去.记忆削减的程度与受到伤害的大小一致.

跟数学有关的区域在哪儿?哪个区域或哪几个区域是专门用于计数的?对这些问题我们没有确切的答案,但可以凭理智做些猜想.神经病学家为了理解脑是如何工作的,已对一些脑伤病人做了详细的研究.[4]尽管这些研究有时得出互相矛盾的结论,但我们还是能够引出一些一般性的结论.

与左半球相比,人脑的右半球常以更加同步的方式活动,它涉及直接的视觉,空间关联感及运动技能.脑的右半部分有先天损伤的孩子有时没有能力去意识出现在他们视觉范围内的一组事物,或去理解"多"的概念.这种鉴别事物的"多"的能力是人生来就有的,不用学.因此,大脑右半球对于计数起着决定性的作

用，因为计数的第一步就是看出一个集合具有"多"这种性质.

即使语言是学会的，它也与脑的特定区域相联系.语言受脑的新皮层左半边的控制(尽管右半边也有一些语言能力).左半边还与一些有序的功能相联系，诸如计划与实施一系列的活动.它也控制着符号表征和抽象的过程；所以一般认为它具有数学运算功能，因为后者在性质上就是符号的与有序的.特别要注意脑的左半边的一个区域(图2)，如果它被伤害了，会引发吉斯特曼(Gerstmann)综合症，这种综合症使病人丧失指认自己手指的能力，使得五指无法活动.除了手指失动以外，病人还会左右不分，丧失进行简单的算术运算的能力.

初看起来，说指认手指与进行算术运算有联系似乎很奇怪.但是在幼儿时期，我们学习数数就是靠有人指点着我们的每一根手指同时说出数词.因此，在我们的手指、计数和数词的声音，以及从一根手指到下一根手指的用手操作的技能之间建立起了【14】牢固的联系.

一些神经病学家[5)]指出，计数与计算技能存在于我们的脑的最前部的一个区域，它称为额叶前部皮质.脑的这部分帮助控制感情，并给我们以责任感、对过去和未来的时间意识以及计划未来行为的能力.有些额叶前部受损伤的病人丧失了计算能力.计数包含按计划进行的巧妙的活动，因此这一区域的任何损伤都会妨碍这样的活动.

那么关于计数发生在人脑中哪一部分的最终答案是什么呢？现在尚无确实可靠的答案.但有一点是肯定的，即有不同的区域跟我们所说的对于察觉数、计数和计算这些技能有关.右脑识别那些直接被我们的视觉感到的多个物件并给我们以"多"的意识.额叶前部皮质能使我们筹划进行计数工作.靠左脑半球的后部，我们把手指与计数联系起来.当这一切发生时，我们让左脑中管语言的部分介入进来产生数词.利用脑的这些不同功能，我们便能掰着指头按正确的顺序说出数词来.

我们是如何学习计数的?

在这一章的开始,我们提到了什么是数和我们如何利用数.在人脑的领域里漫游了一番之后,我们并没有就我们是如何计数的问题给出任何清楚明白的答案.但是我们肯定已加深了对我们的计数与计算技能的复杂性质的理解.最后,我们来考虑我们当初是如何获得计数技能的.

当我们降生时,我们脑中神经元的所有触突或联络还没形成.神经元相互联络的过程持续到我们六岁时.这一成长过程包含着几百万或几十亿神经细胞突然长出轴突而与其他细胞相连.最初,我们左右两半球脑的功能差别不大.只是在发育到适当程度,某些功能才在一边或另一边安家.当这种发育过程进行时,父母正在试着教我们数数.显然,当我们只有几周大时,我们还不能学这个,因为我们的脑还不够大,已经完成最终连接的神【15】经元还太少.但是大约在两岁或两岁半时,我们就开始把不同部分联结起来从而导致计数的行为和对于数的意识.

我们开始这么做是有两个条件的.首先,我们的运动肌与言语技能已发育到能让我们坐下来并听父母说话.第二,父母中的一位和我们一起坐在地上,拿起我们的一只手说:"看,这是你的手指."然后他(她)开始触摸着我们一根根手指说出相应的数词:"一,二,三.下面你来做做看."这种行为是学来的,因为如果没人教,我们就不会去学数数.当然,正如前面提到过的,某些原始部落人不会数超过二的数,因为在他们的文化中没有这种需要.

我们在两岁到四岁之间学习数数,这是一种奋斗,并不是唾手可得的.说这是奋斗,主要是因为我们的脑还处于发育之中,还因为焦虑的父母可能会不自觉地表现出他们担心我们的智力达不到标准.所以他们往往把我们推向能力的极限(正如很多关爱孩子的父母所做的那样).起初,计数是一种非常审慎的行为,

我们费力地记住正确的数词并指着适当的手指说出来.这种审慎的行为由额叶前部皮质控制着.经过充分的实践之后,我们记住了数词,那是我们的词汇里面一个有明显特征的部分,并对每一个数产生了长期的联想记忆.这些联想记忆包括对每个数的声音、视觉形象及动作的记忆.此外,每个数都引起对序列中的下一个数的联想(例如当我们说"三"时,自动联想到下一个数是"四").最初,这些记忆都是很强的;慢慢地,声音记忆占了统治地位.于是,我们掌握了正确的、说的数词,而写的数词和阿拉伯数字一般是在上学后才学会的.与数相联系的动作记忆是由手指的动作——指点得来的.就是成年后这种联系仍牢固地保存下来:当我们心里数数时,经常会下意识地依次触及拇指和其余的手指.当数数最后变为一种自动行为时,这些长期的联想记忆就坐落在我们的大脑新皮层的不同部位.

[16] 即使我们是通过学习才会计数的,我们仍然看到使我们学会计数的脑的那部分功能乃是我们的生物遗传的一部分.此外,计数时的第一个行为,询问有多少对象出现在视野内,看来对所有的人都是由遗传得来的,因而人人有之.因此,对于通过计数(和数)来回答的"有多少"这个基本问题,是个深埋在人类本性

[17] 中的一个问题.

第2章 [illegible]

现在我们来研究一下人类计数的历史有多长.如果计数是人类近期才获得的技能,那么我们可以得出结论:计数毕竟跟我们的本性没有紧密的联系.相反,如果计数是古老的,甚至可以追溯到人类诞生前的祖先,那么我们就会断定:计数是人性的一个组成部分,正如语言和制造工具一样是人类的基本技能.

计数要比有记载的历史古老得多,我们不能说是公元前1103年7月2日,尼罗河畔的老拉贾曼(Rajamman)发明了计数,并把它教给村里人.计数比这早得多.由于它起源于史前,因此我们必须去重构我们在史前的进化过程,然后猜测计数技能可能起源于何时.我们就两种计数方法来做这件事:即依靠手工操作技巧找出一个集合的基数的小棍计数方法和利用数词的现代计数方法.

我们的远祖

关于人类进化史的知识,我们仍在开发.人类学家对这个历史到底是如何演进的有着互相抵触的观念.类人猿——包括大猩猩、黑猩猩、猩猩和长臂猿,看来是还存活在地球上的我们的近亲.在这四者中,黑猩猩通常被认为最接近于人.加利福尼亚大学伯克利分校的阿伦·威尔逊(Allan Wilson)和玛丽亚-克莱尔·金(Marie-Claire King)比较了人和黑猩猩的蛋白质,发现只有1%不同,其余99%的蛋白质相同.黑猩猩在确认自身是独特 [19]

的、跟其他物种有区别方面，表现出高水平的普通智商．在试验类人猿能多快认出镜子中自己的像时，黑猩猩是最快的，其次是猩猩，位居第三的是可怜的大猩猩，它们在试验中完全失败了．

人是已知的唯一真正能计数的物种，即利用小棍计数或数词计数，来正确地选定一个集合的基数．所以，计数的起源时间应该比物种进化线上分叉成人和类人猿的时间点晚一些．另一方面，计数又要比大约五千年前起源于中东地区的书面语古老．因此，计数起源的时间段应划在从猿进化到人与公元前3000年之间．正如我们将看到的，这一时间跨度非常大．

阿伦·威尔逊和文森特·沙利赫（Vincent Sarich，也在伯克利）指导开展了一项确定人与类人猿的蛋白质的异同的研究，以确定这一进化分叉是在多久以前发生的．[1]他们得出了一个已被许多人类学家接受的结论：人和类人猿的分叉在五、六百万年前就发生了．在那以后，我们的脑的体积就达到了黑猩猩的三倍，神经元的数目也是它的两倍．因此主要的不同是我们的脑的体积，尤其是大脑新皮层的尺寸．正如我们先前说的，大脑皮层是理解计数的关键．

紧靠在进化线上我们和类人猿共同的祖先之后的又是什么呢？我们发现了外观有些像猿、又与人类有相似之处的动物化石碎片，它们是如此之多，以至我们还不能一一考证出它们的起源．幸运的是，人类学家已把它们分类成若干组，每一组都具有不同的特征，显示从动物的智力向现代人的智力平稳演进的过程．所有这些既像类人猿又像人的动物称为猿人．

20】

最古老的猿人是非洲的*南方古猿*（Australopithecines），它们的化石距今大约四百万年到一百五十万年．可见，我们的这些同类延续了很长时间——二百五十万年．这一记录可谓是我们的光荣．

*南方古猿*是什么样的呢？同现代类人猿和猴有所区别的主要特征是，他们能以直立的姿势行走，这是向人类转变的第一个

里程碑.他们很矮小——身高不足五英尺,体重不到九十磅,大概在家庭和特有的群体内共享食物,家庭结构有核心成员,可能按性别分担劳动.然而,尽管有这些行为,他们的脑的体积仍然与类人猿的大体相仿——平均为450立方厘米,而黑猩猩是400立方厘米,大猩猩的是500立方厘米.没有令人信服的证据说明南方古猿具有晚期猿人的特征——制造工具,吃肉、使用火,做衣服,埋葬死者或创造符号艺术.[2)] 南方古猿最重要的特点是脑的容量还不够大.这就决定了它们没有能力使"有多少?"这一问题概念化并创造出找到解答的方法.因此,我们可以断定他们并不计数.

大约在距今二百万年至一百五十万年之间,东非出现了一种新的猿人叫能人(Homo habilis),或"手巧的人",(homo在拉丁语中的意思即"人").用这个名字称呼他们是很有道理的,因为他们会制造石器.这是他们比起南方古猿最主要的进展.另外,他们的脑量比南方古猿的450立方厘米要大得多,达到750立方厘米.这是一个本质性的增加,但在其他许多方面,能人很像早期的南方古猿.他们身高不足五英尺,平均体重大约九十磅左右.对他们的牙齿的考证表明,他们可能像南方古猿一样吃果实,而不像晚期猿人那样吃杂食.我们还没见到他们用火、制衣和创造艺术的迹象.不过,较大的脑和会制造工具是大大向前迈进的标志.

有没有证据告诉我们,能人使用了某种计数方法呢?确实没有.能人像他们的祖先一样,生活在非洲东部或南部,那里不变的气候使得一年到头可以采集食物.[3)]他们吃果实,并不需要 [21] 时时积累贮存食物.没有证据表明他们住在永久性的营地里,这种固定的营地是与私有财产的积累联系在一起的.没有财产,加上稳定可靠的食物来源,他们大概不需要计数.尽管他们的脑比南方古猿的大,但没有证据证明他们已有了快速的发声语言.

大约一百五十万年前,进化发生了重要转折,出现了直立人

(Homo erectus),他们的历史一直延续到300 000年前.直立人反映了超越以前的猿人的显著进步.这种人具备下列特征:

- 有比能人大得多的脑
- 有比能人更复杂的工具
- 会使用火
- 从非洲迁移到欧洲和亚洲
- 有季节性的、半永久的住宿地
- 建造了隐蔽处
- 植物与肉类都吃(杂食性)

从上面的一览表中可以看出,直立人比之南方古猿和能人有了引人注目的进步.他们脑体积的增加具有本质意义.由于直立人在其存在的120万年间发生过明显的变化,所以他们的文化被分成早期直立人和晚期直立人两个时期.早期直立人的脑体积比能人的750立方厘米大,平均达到900立方厘米(图3).

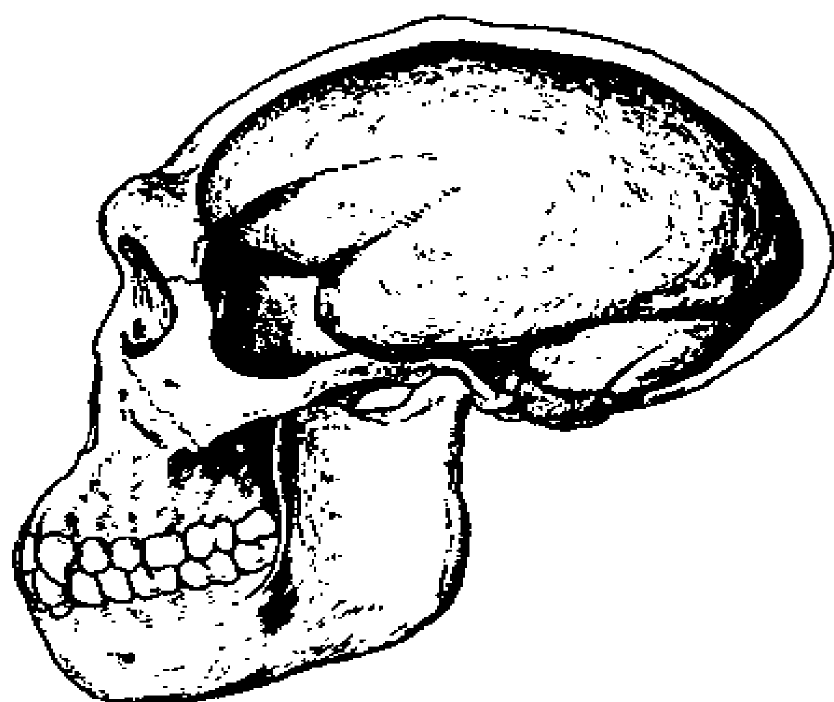


图3 欧仁·杜布瓦(Eugène Dubois)于1891年在爪哇岛上发现的第一批直立人——直立猿人(Pithecanthropus)的颅骨和脑的图示.这一颅骨距今约450 000年,其脑的体积达900立方厘米.(本图引自依利诺伊州芝加哥的种族辑绘馆)

晚期直立人的脑则增大到 1 100 立方厘米,接近了现代人脑的平均体积:1 400 立方厘米.

直立人制造的工具比能人的有了改进,并且已相当复杂,使试图模仿其能力的现代人类学家须经数月的实践,才能熟练地制造直立人的工具.有证据表明直立人建造了简单的隐蔽处,能人是没有这种技能的.然而直立人在技能方面最有意义的进步是驯化了火.这大概经历了五十万年的时间,即从一百五十万年前到一百万年前.在直立人掌握火的使用时期,他们也迁移出了非洲而进入有季节性气候的欧洲和亚洲. 【22】

甚至直立人的外貌也比其祖先更像现代人,他们要比能人高,平均超过五英尺,具有一张相当平的脸.他们的头更大也更圆了,但眉骨仍明显隆起,而且有倾斜的前额.如果你在等火车时看到一个穿西服的直立人,你可能会怪怪地看他一会儿,但最终会略过他.相反,如果你看到*南方古猿*或能人站在月台上,你可能会给动物管理处打电话说那里有一只逃出笼子的猿.

直立人之所以能由非洲迁移到欧洲和亚洲,很可能与他们会使用火,能建造隐蔽处和杂食有关.在严峻的气候条件下,火和隐蔽处帮助他们度过寒冷的冬季.此外,当果实和蔬菜在秋天消失后,他们会猎取肉食并在户外冷藏.没有火、隐蔽处和肉,很难想像猿人能在离开非洲持续温暖的气候条件下存活. 【23】

直立人会计数吗?现在还没有证据说明直立人有快速的发声语言,因此,他们并不能掌握现代的数词计数方法.但他们会不会用小棍计数呢?这是个相当难的问题.确实,要具有数的意识,不一定要有语言,因为动物与人两者都有数的意识.戴维·E·史密斯(David E. Smith)在《数学史》中评论道:

> 众所周知的例子是聋哑儿通过观察自己的手指获得了数的知识,这甚至发生在人们教他计数之前.这告诉我们,数的概念的产生不必等待说的语言的出现,所以野

蛮人在没有超出二的数的名称时也能意识到“三”.[4)]

现在还没有直接的物证说明直立人曾用小棍计数.也就是说,考古学家还没在他们的工具上发现用于计数的印记,也没在他们的住宿地的石头上发现计数的图案.有没有表明直立人用小棍计数的间接证据呢?首先,他们有较大的脑,特别是晚期直立人的脑体积接近现代人.第二,他们成功地制造出复杂的工具.为了制造工具,你必须计划好一系列的动作,最后得出符合愿望的产品.当然这正是把小棍、坚果或卵石对应到物体的一个集合所需要的脑的一种功能.

直立人迁移出气候温暖的非洲,进入季节性气候的欧洲和亚洲.为了在寒冷的冬季存活,直立人当然要贮存食物.这可能是促进用小棍计数的第一个由环境产生的压力.其他一些问题也可能刺激计数的发展.到下一个居住地需走多少天?还差多少天到满月(那时他们能在夜间打猎)?遭熊袭击后还剩几个狩猎者?

我们在缺乏直接证据的情况下推测:直立人大概开发了用【24】小棍计数的技能.依据是他们有较大的脑、较好的工具、会使用火,以及迁移到寒冷的地区生活.用小棍计数未必是一下子就遍及直立人的所有部落的;它的发展可能是经历了不平常的曲折道路.也许它在若干地区的发展是消失了又重新开始的.如果某个幸运的考古学家偶然发现了能为此提供确凿证据的直立人的遗址,那么我们就能立刻解开这个谜.到那时我们再来仔细考虑这个问题.

大约在三十万年前,直立人开始消失.在这之前,可能早在五十万年前,一种新的猿人出现在欧、非、亚三洲.[5)]他们叫做智人(Homo sapiens).智人超过直立人的主要变化是:脑体积增加到接近现代人的1 400立方厘米.然而智人还不是现代人.他们是从直立人向我们的过渡,他们没有充分圆的头盖骨、高高的前

额和平坦的面颊这些现代人的特征.

如果我们推测的直立人会用小棍计数正确的话,则智人无疑也有这种能力.无论怎么说,智人的较大的更复杂的脑有助于发展像用小棍计数这样的智力技能.由于智人的化石不仅在非洲而且也在欧洲和亚洲被发现,说明他们要在相当寒冷的气候中生存.他们使用现代的语言吗?专家们在这一点上的看法多种多样,但一致认为他们并不使用我们这种快速的发声语言.然而,有证据说明,他们在有限制的某个发声范围内使用一种原始的语言.[6)]

现在终于讲到我们进化的最后一个阶段:被称为现代人(Homo sapiens sapiens)的出现.最终的变化涉及我们的大脑容量和用于快速说话的发音清晰的喉头及喉咙.除能制造复杂的工具外,我们还埋葬死者和创造艺术.

现代人何时首次出现?对这一问题有些争论.考古学家已在距今至少三万或三万五千年前的遗址中发现了现代人的骨化石.然而最近积累的证据表明现代人要古老得多.考古学家利用两种判断猿人遗址年代的有争议的新技术已确定出几个遗址有十万年的历史.如果这一结论经得起考验,则现代人已存在了大约十万年而不仅是三万五千年. 【25】

至此,我们最好的猜想是:智人在五十万年到十万年前之间向现代人进化.科学家们推测,现代语言是在过去的十万年间发展起来的.它大概发端于围着篝火歌唱的仪式,并成为重述部落历史和文化的手段.十之八九,大约在十万年前,当我们开始运用现代语言之后的某个时候,数词计数就开始出现了.

用手指和身体计数

在用语言计数之前,我们必须考虑一种起源于小棍计数,或者说可能与小棍计数有联系的计数方法.与现代的孩子一样,古代的计数者都用他或她自己的手指来替代小棍、卵石或贝壳.这

样做的好处是手指用起来方便.手指计数也有两个本质上的不利之处:手指的数量有限(即便你加上十个脚趾),而且不太好用来做记录.如果你用手指计数伸出了八根手指,那么要你整天走动时伸着这些手指,作为你所数的结果的记录,这太不方便了.最好还是用卵石来计数,然后把它们放在一边,以备日后查询.(这里,我们仍假定单个使用者没有数(shù)的抽象概念,所以他不可能"记住"数"八"以作日后参考.)

手指计数具有普遍性,世界各地的人们过去一直在使用各种手指计数的方法.就是现代的数的序列被定名并使用之后,在各种形态的社会中人们依然在用手指计数.古罗马人用这种方法可以数到一万.甚至到了今天,各种经过演化的手指计数与手指计算的方法仍在使用,当然主要是普通人而不是科学精英们在用.由于不需要使用语言和文字,所以它们可能跟用小棍计数【26】一样古老.我们对手指计数的兴趣并不限于它跟小棍计数的联系,它还体现了在数的概念方面的重大进步.前面我们定义过两种数:基数和序数.基数表示集合中元素的个数,而序数表明元素在集合内的次序.用简单的小棍计数,我们只能得到基数.最后的那堆石块或那束小棍表示被数的集合的基数,我们并没因此而产生次序的意识.之所以我们不能发现序数,是因为小棍与卵石被看成是相互等同和可以交换的.

然而,当我们用手指计数时,我们已为计数潜在地附加上了次序.每根手指是不同的,它们都有各自的名称,当在计数中使用时,它们是以在一种明确的次序下被数到的.例如,世界上很多地方的人把左手小指当作计数的第一根手指,接下去是无名指,再下面是中指.这向我们暗示了一种次序,即无名指的出现是在小指之后和中指之前,正如数"二"在"一"之后但在"三"之前一样.因此,手指计数为将序数引入数的概念提供了一个机会.自从我们能按确定的次序数手指,我们的数(shù)也就承继了确定的次序,于是数的序列诞生了.

用身体各部位计数(简称为体位计数)是从手指计数演化而来的.此时,计数的人先指点自己的手指,随着计数数目的增加便指点身体的其他部分.古老的体位计数的遗迹在澳大利亚和新几内亚的部分地区都发现过.新几内亚岛上的一个部落有精心设计的体位计数方案(如表1所示).[7)]

当我们有了让一群猎人或战士采取共同行动这种特殊需要时,体位计数的效用是显而易见的.在围猎或战斗中悄悄靠近猎物或敌人时,这种不发出声音的远距离传递命令或信息的能力非常有用.

手指计数与体位计数曾遍及全球,肯定相当古老.它们为基数同时也为序数演变为抽象的真正的数作了实质性的准备.假如我们问一个农夫他的篮子里有几个苹果,他可以用手中的一束小棍来回答你.只看到这一束小棍,我们无法说出这堆苹果的基数;最好的办法是去摸一下它有多少.但是如果他根据体位计 [27] 数法指点他身上特定的部位,就这一个手势便给出了确切的基数.我们可能没有这个基数的名称,但却立刻知道它是多少.通过使用体位计数,他找出并向我们传达了这个数的值.因此,我

表1 巴布亚岛土著居民使用体位计数方案实例

1 = 右小指	12 = 鼻子
2 = 右无名指	13 = 嘴
3 = 右中指	14 = 左耳
4 = 右食指	15 = 左肩
5 = 右拇指	16 = 左肘
6 = 右腕	17 = 左腕
7 = 右肘	18 = 左拇指
8 = 右肩	19 = 左食指
9 = 右耳	20 = 左中指
10 = 右眼	21 = 左无名指
11 = 左眼	22 = 左小指

资料选自卡尔·梅宁格所著《数词与数的符号》(纽约:多佛(Dover)出版社,1969),35页.

们便知道了这个数跟其他数——即表示数的身体的其他部位——的相对关系.

使用词的计数

对人而言,用表示数的词来计数是后天获得的抽象行为.在使用小棍计数甚至手指计数时,我们还没有真正的抽象的数,因为我们的计数过程是机械的,并不需要抽象的思维.另一方面,抽象的对象是存在于思想中的事物,自然数就是这种抽象实体的完美例证.但是如果我们所做的就是摆弄小棍,用它们跟集合中的其他有形实体作比较,那么我们并不需要抽象的思维.一旦我们用一个声音来代表一个数,那么抽象就已经开始了.正如我们把那些毛茸茸的、四条腿的、总是要让人喂和搔痒的走兽中的【28】任一个都抽象地称为"狗"一样,我们可以用抽象的"二"表示有一对元素的任意一个集合.然后我们用声音"二"来指称这样的集合.

人类在什么时候最终决定用词来代替小棍、贝壳或石块以指称数的呢? 大概不会早于十万年前,因为那正是快速的语音语言最早出现的时候.然而并非人们开始使用语言,数词就一下子普及了的.数词的发展很缓慢,是一步一步逐渐发展到现在的十进制数系的.事实上,我们可以想象数词的演化受到了耽搁,因为现代人经由小棍与手指计数已获得了确定集合中基数的完美的方法.他们为什么还需要数词呢?

为了得出最早的数词是如何演进的某种看法,让我们来看一看已被考古学家研究过的一些现存原始部落的计数体系.正如我们已经指出的,一些部落如澳大利亚的土著居民,在现代欧洲人第一次遇见他们时,还不能用超过"二"的词语计数.[8]他们有一个词表示"一",一个词表示"二",此外的都简单地称之为"多".南非的勃格达马(Bergdama)部落也只有两个数词"一"和"二",其他的都称为"多".这几个部落是否会用小棍计数未见记



录.我们必须十分小心,不要认为那些部落对于数的全部理解和应用只局限于在他们的语言中有数词表达的那几个数.正如格雷厄姆·弗拉格(Graham Flegg)在《数:它们的历史与含义》一书中阐述的:

> 在此,发出某种警示是重要的.我们不应该像部分考古学家那样匆匆作出结论,说人类不能认知超出他们的数词之外的数.词语常常是伴随着手势而形成的.在得出一般结论之前,两者都应适当地加以研究.[9]

在非洲、南美洲以及新几内亚,其他许多原始部落也只有两个数词:一和二,但这两个数词可以组合起来使用,用于数更多的东西,即所谓的2元计数制.使用2元计数制时,我们只要简单地把表示一和二的两个数词适当地重复几次即可.澳大利亚的嘎姆加尔(Gumulgal)部落提供了一个使用2元计数制的实例.[10]他们用于代表一的词是"urapon",代表二的是"ukasar".他【29】们以下列方式计数:

1 = urapon("一")
2 = ukasar("二")
3 = ukasar-urapon("二-一")
4 = ukasar-ukasar("二-二")
5 = ukasar-ukasar-urapon("二-二-一")
6 = ukasar-ukasar-ukasar("二-二-二")

这些部落使用的2元计数体系能够用来数到很大的数,不过他们通常不这么做,因为表示大一些的数的一串词很快就变得很难记住了.2元计数体系的使用者常常要借助手指来协助词语计数.2元计数体系的发展因而受到了限制.它不实用,并且很

容易被简单的使用双手手指的计数方法所取代.事实上,用词语的2元计数制的效率及用处比小棍计数法差得多.使用小棍计数法,人们不仅可以数比较大的数,而且还可以用一束小棍或一堆卵石对所数的结果作半永久性的记录.用词语计数时,我们刚说完最后一个数词,它好像就消失在空气中了.

由于在不同的地方——从非洲到南美洲直至澳大利亚,都发现过2元计数制的使用,这引起了一场争论,即2元计数制是在各大洲各自分别演化而来,还是在某一处产生再传到全球各地的.无论是哪种情况,这种计数制无疑有久远的历史,可能跟语言本身一样古老.到了晚些时候,2元计数制演变得更复杂了,包括乘以某个数而得到更大的数.例如,姑且指定三个不同的词代表“一”、“二”、“三”,而“六”表成“二－三”,它的意思是用三乘二而不是二加三.这称为新2元计数制;比起纯粹的2元计数制,它在世界上更多的地方被发现,不过这些地方通常与使用纯粹的2元计数制的地区比邻.

数词发展的下一个阶段是5元计数制,它必定是受到一个手上的手指数的启发而形成的.事实上,在一些使用5元计数制的原始部落的语言中,超过四的数词确实画成手势的样子,用于表示手指计数时相应的数.5元计数制已在大多数洲被发现.在【30】南美洲发现的一种计数方式如下:

五＝“一整只手”
六＝“另一只手上的一指”
十＝“两整只手”
十一＝“脚上的一趾”

当我们数到二十的时候,“整个人”(这里指十根手指和十个脚趾)都用上了.[11]

5元计数体系引伸出两类不同的数词计数:5－10计数与

5－20计数.5－20计数体系可能更古老.表2给出了这两种计数法的一般方案.列出的只是每次增加五的数;其间的数将分别加上类似的数词.

表2　一般的5－10计数与5－20计数法方案

5－10计数	5－20计数
10＝"十"	"两个五"
15＝"十和五"	"三个五"
20＝"两个十"	"二十"
25＝"两个十和一个五"	"二十和五"
30＝"三个十"	"二十和两个五"
35＝"三个十和一个五"	"二十和三个五"
40＝"四个十"	"两个二十"

在实际应用时,上述两种体系以不同的组合方式混用.所用的词通常是单个手指、身体某些部分、甚至是各种计数手势的名称或名称的组合.我们在现代计数体系中看到了上述方法的痕迹:单个的数字我们称为 digit,而这个词溯源于拉丁字 digiti,后者的意思是手指.

作为修饰语的数

当最初给数选定词语名称时,它们并没有现在所具有的抽象含义.开始它们只是用做形容词来描绘被数的客观物体.我们还能在现代的语言中看到这种痕迹.说同轭(上的)牛,我们立即【31】知道是指两头牛.我们决不会说"同轭手套".作为表示数目的形容词,轭是不会用来形容手套的.我们说一副手套,但说"一副人"听起来就有点莫名其妙了.修饰两个人的合适的表数形容词一般是俩、一对、一双(如俩人,一对夫妻,一双儿女).土著人通常用不同的数词修饰不同的事物.在斐济岛,土著人用"bola"描述十只小船,但描述十只椰子却用"koro".[12]不列颠哥伦比亚省的土著美洲部落使用数的七类不同名称来计不同种类的东

西.[13]在不同的语言中使用不同类型的数词,表明早期的人类认为数与被数(shǔ)事物之间有紧密的联系.在《数词与数的符号》中,卡尔·梅宁格解释说:

> 这些数类的存在再次清楚地显示:数跟客观对象的联系在早期人类的观念中是多么紧密,各种事物对于数有多么强的支配作用.它们也说明了原始人必须克服的智力障碍,他们不仅要让数的序列从这些最初始的依赖中解放出来,还要创建最早期的那些数.[14]

慢慢地,数词得到了普遍的推广,可以用来对更多的客观对象的汇集进行计数.这使得有可能将数当作纯抽象的事物来考虑而不再与任何客观的有形实体相联系.5—10与5—20计数体系为我们今天使用的10进制体系提供了一条通道.偶尔也有另一些计数体系出现,但结果都是被淘汰出局.以12为基底的体系以及苏美尔人和巴比伦人以60为基底的体系便是证据.现在,使用10进制计数体系是地球文明的主流.

农耕时代之前的数

人类出现后的大部分时间里,我们的祖先都是住在山洞或棚屋中,用矛猎取野牛,采集鲜果、坚果及块根植物.称这种生活方式为"狩猎-采集"模式十分恰当:妇女们采集可作食物的植物,而男人去猎取动物.最后的十万年间,他们可能使用小棍与手指计数,因为到那时,现代人类所具备的一切技能都已有了充分的发展,生存的压力必定对这类计数方法起了促进作用.那么使用两个和五个数词的体系是何时由这种更早的计数法演化而来呢?

【32】

我们可以假定"狩猎-采集"模式是人类从直立人——最初的杂食人群——到一万一千年前农耕时代出现之前的生活方

式.其时间跨度达一百五十万年之久."狩猎－采集"必定是一种成功的生存手段,以至它延续了这么长时间.

当我们设想人们怎样靠狩猎与采集为生时,我们很自然地会想像有一小群脏兮兮的、身着兽皮的人,他们艰难地穿越荒原搜寻他们的下一餐饭食时已饥肠辘辘.然而,研究一下现在的狩猎－采集者就会发现,他们组成的群体比生活在城市社会中的人有更多的空闲时间,而且没有经历过不间断的饥饿威胁.[15]事实上,如果我们那些靠狩猎－采集为生的祖先总是生活在灭绝的边缘,那么他们的这种生活方式怎么能在一百五十万年的时间里长盛不衰并扩展至全球呢?

有一个流行的假设说:人们一旦聚在几个城市中并变为"文明的"人,业余时间就变得充裕了.于是统治者们、牧师们或公务人员们便在这些空闲时间里发明文字、数学和科学.如果真是这样,为什么这些狩猎－采集者没有发明这些东西呢?他们中的许多人肯定花了许多时间围坐在一起讨论周围的世界!他们没能发明是因为那个假设是错的.业余时间并不会启发人们去搞发明创造,问题才是激励因素.文字、数学和科学被创造出来是因为人们遇到了需要他们来解决的问题.

真正的农耕业(指精心策划地、有选择地播种种子以期生长出食物)大约始于一万一千年前的"肥沃新月地区"(西亚某地).在这之前发生了什么事呢?我们拥有的关于计数的最古老而直接证据是卡尔·阿布索隆(Karl Absolon)博士1937年在捷克斯洛伐克发现的一根距今三万年的狼骨.[16]骨头上的图案如图4所示,上面有55道刻痕,每五个成一组——显然是精心记录的计数结果.这根狼骨提醒人们注意五元计数法的使用.因此,史前的狩猎－采集者可能发展了2元计数法、新2元计数法以及5元计数法. [33]

纯粹2元计数法使用了相加法则.数"四"是"二－二",意思当然是二加二."六"是"二－二－二",即二加二加二.看起来生

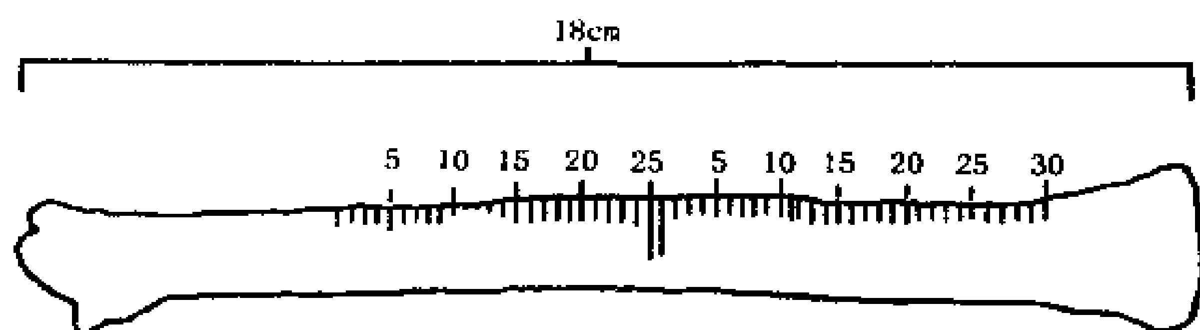


图 4 卡尔·阿布索隆博士于1937年在捷克斯洛伐克发现的三万年前的狼骨的示意图.五十五道分组的刻痕展示了作刻痕者所具有的计数技能.(本图根据照片改绘,选自卢卡斯·邦特(Lucas Bunt),菲利普·琼斯(Phillip Jones),杰克·贝迪恩特(Juck Bedient):《初等数学的历史渊源》第 2 页,纽约,多佛出版社.)

活在三万多年前的狩猎－采集者理解小的自然数的相加法则,这与 2 元计数法先于 5 元计数法有关.我们也能猜到他们至少初步理解了乘法,因为处于纯粹 2 元计数法与 5 元计数法之间的新 2 元计数法包含小的自然数的乘法.我们可以从“六”这个数看出点门道,它通常记作“二－三”,它意指用三乘二而不是二加三.由于在狼骨上作记号的捷克斯洛伐克原始部落可能用的是 5 元计数法,我们可以假定那个时代的一部分人已越过了新 2 元计数的阶段.这支持了如下信念:旧石器时代的狩猎－采集者(他们生活于七万年至二万年前)理解简单的加法和乘法.

正如几个生活于 20 世纪的原始部落仍在做的那样,一些早期的新 2 元计数法可能使用减法来得到七和九这两个数,这暗示了减法的存在.某些部落用 $2\times4-1$ 来代表“七”,$2\times5-1$ 来代表“九”.[17]至于除法,只有间接而又间接的证据存在.但是仔细想想,对于可追溯至直立人的整个早期人类,分配食物有多么重要,他们至少要能理解简单的分数这样的除法法则.他们必定具有把某样东西分成两份、四份、三份的概念.这些人能够制造复杂的矛,组织同心协力的围猎,在寒冷的冬季继续生存下去,但是说他们没有把物体对半分的思想,这似乎不尽合理.当然,做简单除法

的知识并不意味着狩猎－采集者就已具备了作为数的分数概念．的确，我们还缺乏这方面的证据．把某样实在的东西分成两半可以被看作把它变成两个新的东西，而不是创造出两个“二分之一”．由于没有相反的证据存在，我们现在应该假定古代的狩猎－采集者尚未获得任何超出自然数之外的数的概念．

根据上述证据，对于距今超过一万一千年的农耕时代来临前数的演化，我们最好想像成是什么样的呢？十之八九，绝大多数人大概都认知了最初出现的那些自然数．至少有一部分人不仅能熟练地运用5元计数法来计数，可能还会对小的自然数作算术运算：加、减、乘，也许包括除．我们必须小心谨慎，以免对狩猎－采集者的数学能力估计过高．很多生活在现代的狩猎－采集者通常只会使用很初级的、不完全的新2元计数法．当然，新的考古发现，或是对已有的发现进行重新解释，都有可能对弄清农耕时代来临前我们祖先的数学理解力提供新的线索．

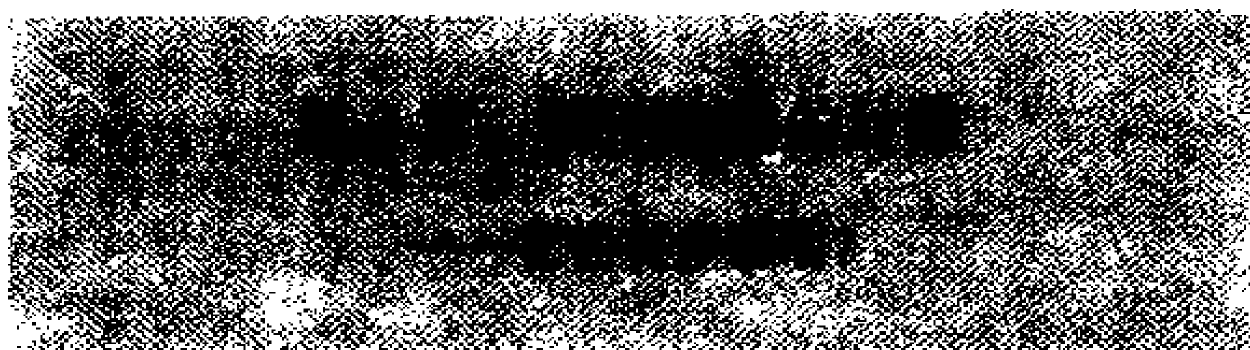
小　　结

我们已经揭示了人类发展的一些阶段，并尽我们之所能作出了推断，它们涉及原始的小棍计数、现代数词直至各种数的体系．尽管常常缺乏直接的证据，我们还是思考了在理解自然数方【35】面前进的脚步．我们的祖先用了一百万年才抽象出数的概念．所以说数的抽象过程是一个极其缓慢的过程．这一发展事态还支持这样的看法：计数不是现代发展的产物，不是那些有空闲时间的埃及祭司们创造出来的，而是需要经历数千年才获得的技能，它可能是跟我们使用火一样古老的一门技能．

我们不妨大胆做出这样的结论：我们可怜的祖先是愚笨的，而20世纪的我们是智慧和聪明的．为什么他们用了那么长时间才发现了数与计数？为什么他们没有聪明到能想出抽象的数呢？这个结论忽略了一个事实，即我们的祖先——特别是生活在近十万年间的，他们与我们现代人一样机敏和聪慧．就像今天

的人一样，他们之中存在着具有各种智力的人．一些人脑筋明显地转得慢，而另一些人可能才气焕发．史前巨石群和金字塔这样的古代建筑和遗迹显现的高超技艺与精巧的结构，足以表明在人类发展的每一时期都有智能高超的人存在．虽说，远古时代的那些智者为了弄清数的概念和计数，历尽千辛万苦；可我们也并不比我们的祖先更聪明，我们是在孩提时期学会的数．很简单，我们只是享受了因遗传而得到的好处，这是需要许许多多代人的进化才会形成的．

向数的概念进军在开始时非常缓慢．它的第一步延续了上万年以上．发展数系的进程，步子就大多了，前进的速度会快不少．这种趋势在我们这次旅行的以下阶段将会继续，那时我们将描述在人类文明的黎明时期写成文字的数的历史．



没有比讨论动物的智力更容易引起争论的事了；喜欢狗的人抨击喜欢猫的人，爱马者赞美他们崇拜的马，猪迷们则悠闲地坐在那里，微笑着欣赏周围乱糟糟的一切．动物到底会不会计数的问题也是众说纷纭．一些科学家与大多数宠物所有者宣称，他们可爱的小宝贝不仅会数数，还会做加减法，而且在某种特殊场合，能知道主人在想什么．一位专注的养狗人说："斯帕基（狗名）怎么知道我要去为它套上狗链呢？假如我起床去了厨房，它已经就知道了．于是它跳起来跑到前门那儿等着．这只有一种解释，即它知道我在想什么．"

我们的问题比讨论一般动物的智力要特殊得多；我们承认有一些动物看起来相当聪明，而另一些显然很笨．我们想要知道的是，是否有动物会数数，因而它们有数的概念．我们在前面对现代的计数下的定义，涉及把数词映射到集合的元素上．由于人类是目前世界上唯一会使用快速语音语言的物种，所以我们知道这一定义已将一切动物排除在能用这种方式计数的物种之外（不过海豚与鲸可能是例外——这两种动物看来具有通过声音进行快速信息交流的能力）．但是，这一定义给出的限制可能太强了．我们真想知道的是，是否有动物具有如下能力： 【37】

1．认出集合的"多"的特性，

2．有了解集合中有多少东西的愿望（或需要），

3．用映射的办法来计算集合的基数．

上述三个要求与小棍计数的定义是一致的，后者不需要用语言来表示集合的基数．即使根据这种比较宽泛的定义，专家们对什么动物会计数仍意见不一．英国开放大学的创始人，该大学的讲师和不列颠数学史协会前主席格雷厄姆·弗拉格(Graham Flegg)对动物计数评论道：

> 无论是这么说或是那么说，类似的故事引导人们得出错误的推断，以为除人之外的生物实际上也会计数……对于"动物会计数吗？"这个问题，我们必然要给予一个坚决否定的回答．[1]

至于相反的意见，我们来看看伦敦大学学院教授卡尔马斯(H．Kalmus)的见解：

> 现在已不存在疑问：某些动物如松鼠跟鹦鹉等经过训练能够计数……有关海豹、老鼠甚至传播花粉的昆虫具有计数本领的报道一直不断．这些动物以及其他动物中的一些个体靠类似于视觉的模式区分数，而另外的一些个体可以被训练成能辨认甚至产生一系列声音信号．少数动物经过训练居然能按所看到的东西敲打点数……只是因为它们缺少能说的数字和书写的符号，才使许多人不愿承认动物是数学家．[2]

研究动物行为这一领域里的两位专家怎么会得出如此抵触的结论呢？答案到底是什么——动物究竟会不会计数？为了解决这一问题，我们先来回顾几个很有趣的事例．

特 殊 事 例

几乎每个人都听说过聪明的汉斯的故事．汉斯是一匹马，在

它的训兽员的命令下不仅能数数，而且还会做加法和减法．汉斯 [38] 灵巧地用蹄子踏地以表示问它的数学题的正确答案．不幸的是，研究人员发现这匹马实际是对训兽员发出的一个不易被察觉的信号做出反应而在恰当的时候停止踏地的．事实上，它既不会数数也不会算术．可怜的汉斯！这个例子提醒研究者要警惕其他例证，情况往往是为了让动物"解决"向它提出的问题，训兽员或科学家漫不经心地给出了一个反应敏锐的动物能察觉的信号．实际上，基于这类错误的提示所造成的研究失误，被人们称为聪明的汉斯式的错误．心中有了聪明的汉斯这个故事，研究者们该小心提防这种无意义的研究或言过其实的断言．

下面这个例子虽然鲜为人知但更吸引人．据 19 世纪的一位天文学家和数学家约翰·卢伯克(John Lubbock)爵士报道，一位庄园主被一只在他家的了望塔上筑巢的讨厌的乌鸦弄得心神不宁．[3]如果这个人跑进了望塔去驱赶乌鸦，那只鸟就飞出塔外，一直到他离开才回来．为了骗这只乌鸦，庄园主派了两个人进塔又让其中一人离开．但那只鸟太聪明了，仍滞留在塔外．次日那位先生重复这一行为，不过是让三个人进塔而两个人离开．那鸟仍不回到塔中受死．最后，当五人进塔而四人离开时，乌鸦终于被骗而飞回了望塔．故事讲完了，我们只能仰赖我们自己的想像力以决定是否这只乌鸦升入了乌鸦的天堂．我们从这个故事中能得出什么结论呢？大概乌鸦能数到四但数不到五．然而，如果这一暗示正确，那么乌鸦可能会数数．

对鸟类的认真系统的研究又肯定了上述鸟会数数的证据．弗赖堡大学(University of Freiburg)的动物学前教授奥托·克勒(Otto Koehler)曾做过一些实验，训练鸟来辨认不同的点数．[4]一只渡鸦经过训练可以选择由二到七个点组成的特制的图案，尽管他并不将其叫做计数，因为他坚持认为真正的计数应伴随着语言．

> 我们的鸟不会计数，因为它们没有词汇，它们不能给它们能感觉到的并能按其行动的数起名字，但在具体的事件中它们学会了"用无名称的数来思考."[5]

[39]

很多人听说过蜜蜂用奇妙的舞蹈告诉同伴在哪里可以找到花粉．乌斯特工艺学院的前院长兼数学教授利维·伦纳德·科南特(Levi Leonard Conant)讲述过一个跟计数密切相关的昆虫的故事.[6]黄蜂在把它们的卵封在巢室中之前，先把其他死昆虫放在蜂房内作为食物供孵出的幼蜂吃．有趣的是，对不同种的卵都放进不同数量的牺牲品做食物，有一种放五个，另一种放十个，而有一种竟满满地放进二十四个．实验证明，它们并不是用牺牲品把巢室填满，而是将其作为不再往里放的信号．它们怎么知道什么时候已放进了正确数目的牺牲品呢？它们又是怎么精确地识别十或二十四的呢？

有一类黄蜂，其雌蜂长得要比雄蜂大的多，所以母蜂给雌卵身旁放十只死昆虫，而在雄卵身旁只放五只．它怎么知道是这么做的呢？全是天性使然吗？我们要正视下列说法：如果只具有简单神经系统的低等动物黄蜂会计数的话，那么大多数动物可能都有计数的能力．另一方面，如果这种令人惊愕的绝技仅仅归于天性与本能，那就是说天性能模仿计数行为，我们应该加倍小心不要对动物的行为做出错误的解释．

我们已经讨论了鸟和昆虫，哺乳动物又怎样呢？宾夕法尼亚大学灵长目动物研究室的盖伊·伍德拉夫(Guy Woodruff)和心理学系的戴维·普雷马克(David Premack)对黑猩猩的计数能力进行了研究．他们发现黑猩猩不但能识别一到四之间的多个物体，而且还能准确识别出四分之一、二分之一、四分之三和全部．然而伍德拉夫和普雷马克并不打算说黑猩猩是在计数，"……尽管可以教会类人猿去数，但离预期效果还差得远．"[7]

在对海豚进行的研究中，路易斯·M·赫尔曼(Louis M. Her-

man)测定它们能够记住一串多达八个的抽象符号的正确次序.[8]这超出了人所达到的标准范围,人通常在超过六或七个符号时就会失败(对仅有七个数字的电话号码,我们都要在第三与第四位数字间用短破折号分开以便于记忆).尽管能记住八个抽象符号的顺序确实让人吃惊,但这并不是计数.

所有这些有关动物行为的资料到底说明了什么?看起来我【40】们能在一定的条件下教会某些动物数到七.这是真正在计数还是在展示另一种技能?

直接的感性理解

动物和人都有一种特别的能力,即能够辨别进入视野内的小数量的同样的或类似的物体.一些专家称之为瞬感(subitizing).这是一种辨别物体数目的能力,并不需要有意识的思维.它是即时产生的,大脑没有进行有意识的活动.这是一类简单的"对于多的察觉"能力.业已证实鸟和黑猩猩具有这种能力.对人来说,每天都在运用它.人们不经训练就能轻易地识别进入他的视野里的一、二、三、四或五个物体.我们不用去数,这些物体的数量是显而易见的.看一下图5,它含有五个由点组成的模式,点数分别为1至5.当你看到其中每一个模式时,不用数(shǔ)就立即知道那个数是几.现在请你在一看到图6后立即说出其中的点数.假如你说八,那你可真够幸运的.在大多数情况下,当一堆物体的数量超过五时,我们必须得数一数才清楚,除非这种物体按某种顺序排列,使得大脑能直接给出正确答案.这种直接的识别就叫做瞬感.我们人类能做到,动物也能做到.

实际上,人对于"多"的直接感知能力可以达到更高的程度.有时,当遇到数量很大的一堆物体时,我们会有一种直接的察觉,发现什么地方不对劲,少了些什么.卡尔·梅宁格在《数词与数的符号》中讲述了一个故事,说明只有三个数词的南美洲印第安人确实有瞬感技能.[9]印第安人在他们旅途中带着大批的狗.

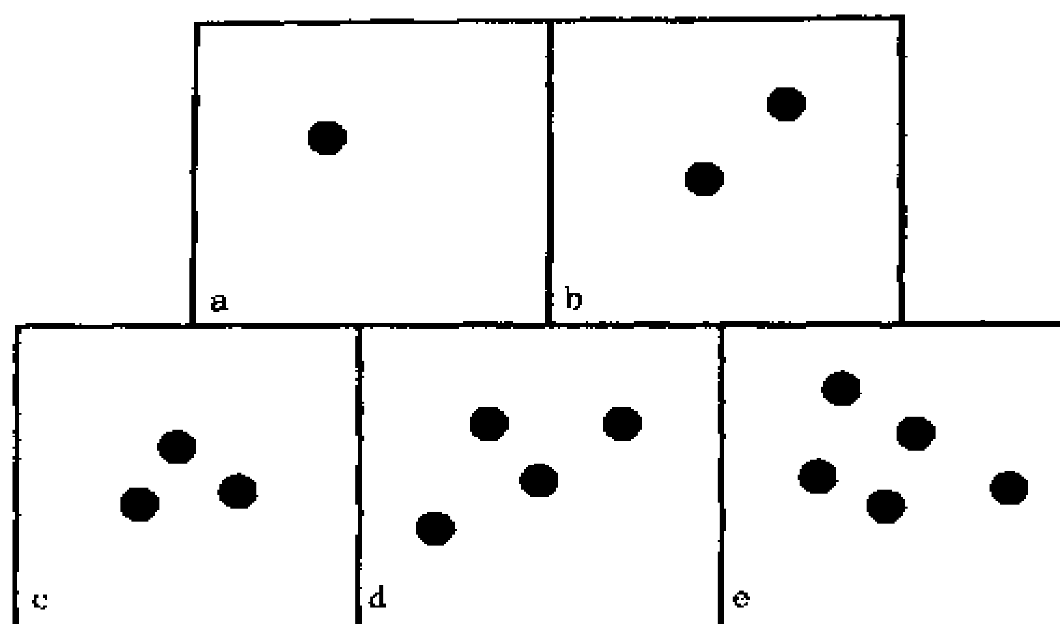


图 5　含有一个点到五个点的汇集.一眼就能认出每个模式中所含的点数而不需要去数.

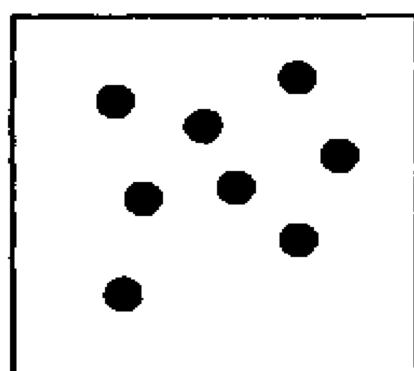


图 6　图中有几个点? 你必须停下来数吗?

在察验狗的数量时,印第安人没有花时间去数,而能立即看出是否走失了一条狗,如果是,他们会呼叫,直到走失的狗重新归队.

一位带着她的学生去远足的中学教师,会突然感觉少了一[41]个人.于是她迅速地数了一下学生人数并发现确实少了一个人.瞬感让人获得哪儿出了毛病的第一印象.打扑克的人会对一副牌有一种微妙的触感.玩牌时常有这种情况,当玩完一盘,由发牌者洗牌时,他(或她)会说:“牌少了!”每个人都在自己的前前

后后迅速寻找丢失的牌.大多数情况下只少了五十二张牌中的二、三张.那么发牌者怎么知道少牌了呢？他(或她)感到手中那【42】副牌少了——一种直接的感觉.有很多例子说明存在这种直接领悟事物的量和多少的能力.

然而,瞬感还不是计数,因为这里不涉及把什么东西映射到集合的元素上.动物的瞬感技能只对小的数目,即八以下的数目起作用.当黑猩猩看到一组对象的集合,它立即识别出那个数——可这不是计数.当渡鸦看见由点组成的模式,它的辨认也是即时的.没有证据说明它们在有意识地进行计数操作.约翰·麦利什(John Mcleish)在他的《数》一书中,解释了这种直观的感知并不等同于真正的计数:

> 动物对于数有直观感知力.这意味着它们依据经验,不需要靠分析就能直接弄清楚一堆物体在小数量范围内的差异……然而,仅此而已.动物只能对于数之间的关系做出反应,如对巢中的卵或食物所表现的行为那样,这跟它们的种群的生存需要联系在一起.[10)]

人和动物对较小的数的认知能力是与生俱来的.这种认知力对于开始来计数是必须的,但它又不是计数,甚至连原始的小棍计数也赶不上.我们已给计数下过定义,在这一定义下我们可以断定:没有任何证据证明目前有任何一种动物会计数.为什么我们如此强调计数行为呢？你可能会说:“看,那可怜的不会说话的黑猩猩能区分五个点和四个点.给它点面子吧！它认得小的数目,尽管它没有给这些数起名字.”这也许是真的,可是我们关心的是超过识别一到七个点的认知力.我们关心实行映射操作的能力.我们关心对自然数的感知,面自然数从逻辑上说是不存在终结的.我们关心的不仅是能把三,而且是把三十和三百加以概念化的能力.换句话说,计数应该是一个可以无限进行下去

的过程，直到我们确定出我们所关心的集合的基数．仅能识别小的数量不能满足我们计数的需要．

然而，我们对动物能否计数的探索并未终结．尽管目前我43】们不知道哪种动物具有计数能力或具有关于（与计数有关的）抽象的数的想像力，但却不排除可以教会某些动物来计数，特别是黑猩猩和海豚．我们不应该忘记鲸和海豚很像我们人类用复杂的、快速的声音传递和交换信息．我们不知道它们是否会计数．这个问题的解决还有待于对它们的信息交流作进一步的研究．

它们能学会计数吗?

虽说现今的动物并不会计数，试问在未来的一段时间内能教会它们去计数吗？表面上看，这似乎是个毫无意义的愚蠢问题，既然它们现在不会计数，将来又怎么会计数呢？但这仍然是个重要的问题．我们可能总想说：只有人类才会通过将词语或实物映射到集合上的办法来计数．这是不是因为我们的神经系统有其他动物所没有的与众不同之处呢？如果能够教会动物计数，我们就知道对于其他种类的生物，的确可以使它们进行计数及一般意义上的数学活动（数学是研究数的）．这说明数学跟其他智力活动相比具有普遍性和可转移性．如果目前被人类理解的数学不能转移给其余的有智力的生物，那么在我们研究与应用数学时，可能就不会使用最普适的形式来表达了．也许人类的数学反映了人的思维的独特性，而并不像各个时代的许多哲学家所主张的那样，是完美的真理的代表．这一点给我们以启示：我们的数学在它能够与非人类的智力活动交流之前，必定要经历去除人类特有的观念的转变．

要想把动物看作数学家，我们该做的第一件事就是看动物的脑容量相对于其体重的大小．这虽然是一种粗略和不精确的度量标准，但它能使我们对各种动物的聪明程度有一个大概的

了解.不过要作这样的假设:小型动物的身体小,它们通过小的躯体获得知觉并向其身体各部分传送各种指令,因此所需要的神经组织的总量也相应地少;大型动物则需要更多的神经组织【44 以适应它的较大的质量.因此,如果其他一切条件都相同(实际上这是绝对不可能的),而且动物都享有同等的智力,那么脑重与体重之间必存在一个不变的比率.另一方面,如果某种动物的脑组织相对于其体重所占的份额比其他动物的大,我们就假定这种动物必定比其他动物"聪明".

表3列举了各种动物的脑重(以克为单位)、体重(以千克为单位),以及体重与脑重之比.表中的动物按其脑量由大到小排列.最右边一列表示体重与脑重的比率,比率越小,意味着该动物的脑量在身体总量中占的比例越大.大多数专家认为这种比率充其量只是对智力的极粗糙的测量.大脑新皮层是脑皮层的最外层表面,乃是实现较高级的脑功能的中心部位.更合理的测算应考虑体重与大脑新皮层区域的比率.

鸟类的情况也否定了用脑容量大小测定智力的办法.因为自然的进化为它们设计了很轻的体重,这使它们达到的比率超出了它们应得的值.另一方面,水生哺乳动物处于不利的地位.鲸和海豚生活在有浮力的海洋中,不像陆地动物那样受到重力的巨大约束.它们有着为保温而储存大量脂肪的身体.这导致了它们比陆地动物有更大的躯体.因此,它们的比率被歪曲而成了很大的数.即使有这些支支叉叉因素的影响,我们仍然发现体重-脑重比还是有用的.

表3　比率:体重与脑重

动物	体重(千克)	脑重(克)	比(比率)
蓝鲸	58 000	6 800	8 529:1
逆戟鲸	7 000	6 200	1 129:1
非洲象	6 500	5 700	1 140:1

续表

动物	体重(千克)	脑重(克)	比(比率)
长吻海豚	155	1 600	97:1
人	70	1 400	50:1
普通海豚	100	840	119:1
河马	1 350	720	1 875:1
长颈鹿	1 220	700	1 743:1
霍尔斯坦奶牛	920	460	2 000:1
黑猩猩	52	440	118:1
松鼠猴	0.717	26	28:1
矮地鼠	0.004 7	0.1	47:1

[5]

表3显示:人并不具有最令人满意的比率.松鼠猴和矮地鼠都具有更理想的体重-脑重比.然而这些动物的脑量太小了,没有足够的神经元来进行任何重大的思维活动.那些脑量比人大的动物,包括鲸、逆戟鲸、象和长吻海豚都是很令人感兴趣的候选者——尤其是比率接近于人类的海豚.大象、逆戟鲸和鲸引起人们兴趣的是它们居然有如此大的脑.它们做什么事需要这么大的脑呢?为什么看起来所有时间都在各处遨游和吃小虾的鲸需要大约重十五磅的脑呢?难道在水中到处游荡,遇到磷虾群便张开大嘴吃,就这么具有挑战性吗?难道那些巨大海兽正在用它们巨大的脑琢磨海中巨兽是怎么思考的吗?

所有这些动物中,最有希望成为学习计数的候选者的当属黑猩猩和海豚,主要根据的是它们的脑的大小和进化状况.如前所述,对黑猩猩计数进行的研究没有得出有意义的、正面的结果.对海豚脑与人脑作解剖比较时,发现海豚很走运(图7).尽管存在着重大的差异,但总的说来,海豚脑的大小与复杂程度与我们人的一样.海豚研究人员和训兽员都对海豚的智力留下了深刻印象;也许,海豚是唯一值得我们去试试运气的最合适的动

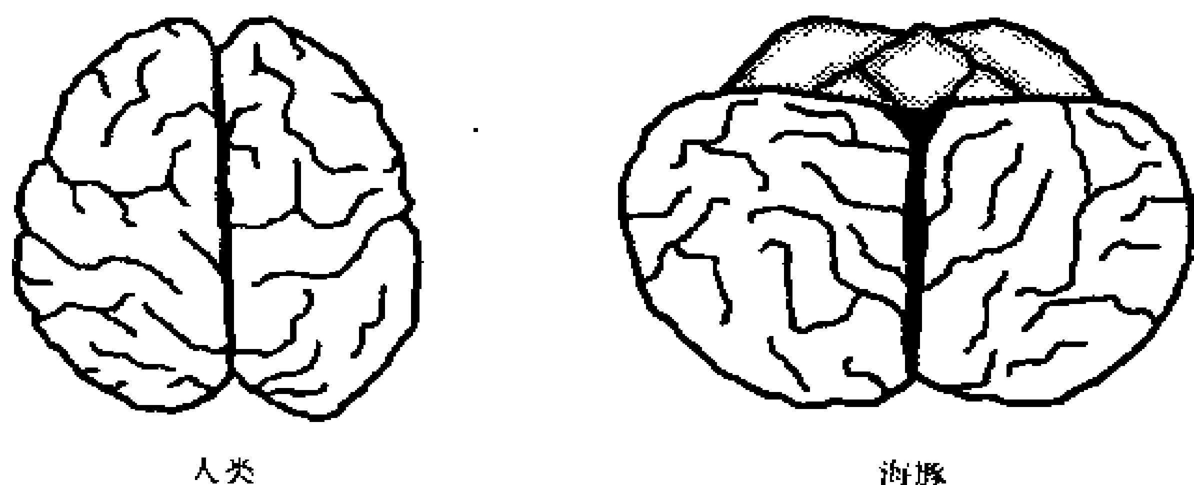


图 7 典型的人脑图与海豚脑图.［选自罗伯特·F·伯吉斯(Robert.F.Burgess)所著《海洋中的秘密语言》(纽约:多德－米德公司,1981)第 223 页］

物,看看人到底能否跟别类动物交流.不过也有些人认为我们对海豚的脑的功能估计过高了.例如,佛罗里达大学前副教授、生物信息交流部主任戴维·考德威尔(David Coldwell)和佛罗里达大学信息科学实验室前研究员梅尔巴·考德威尔(Melba Coldwell),在他们所著《长吻海豚的世界》一书中阐述道:

> 大多数的人注意力集中在这样一种观念上,即海豚和我们中的某些人一样聪明,或比大多数人更聪明,或它们能交谈但我们人类还没有聪明到能理解它们的语言.确实,一些海豚能够无拘无束地跟海底科学工作者一起实施海军的海洋实验计划.然而,大多数工作人员目前还只是把海豚当作一种特别温顺而有智力的哺乳动物,其本身的条件可以跟平均水平之上的狗相媲美.[11)]

【46】

海豚生活在一个由它们的听觉占主导地位的世界里,而我们则生活在一个由我们的视觉占主导地位的世界里.与海豚在

一起工作时，我们尝试用向它们“展示”物体或“打”手势的方法与它们沟通．可惜，尽管海豚有超常的听觉，但它们的视觉相当差．

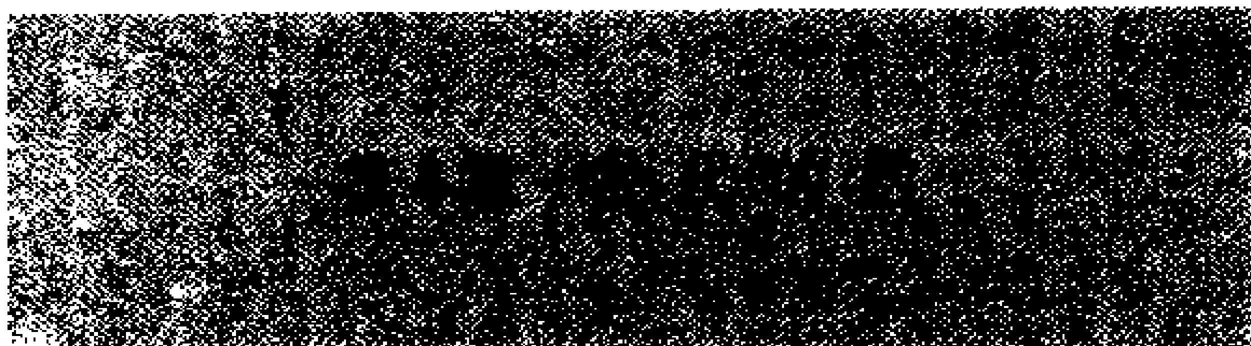
在我们的数学中，也是由我们的视觉占据着主导地位．我们能在心里看到数学中的各种关系，而不是听到它们．因此，纵然海豚与人类一样聪明，或比人类更聪明，它们也决不可能懂得我们的数学．另一方面，它们可能有能力了解（甚或已经有了）某种听觉数学．希腊数学家欧几里得（Euclid，活跃于公元前300年左右）汇编了几何学的一组公理、公设和定理，两千多年来一直作为数学标准课本．构建欧几里得几何学的一块基本积木是他的第五公设，几百万学生都知道它．它说：如果 A 和 B 是两个点，c 【47】是一条过点 A（但不过点 B）的直线，则有且仅有一条过点 B 的直线与 c 平行．我们是这样在心里看到这条公设的：首先我们看见两个点 A 和 B．然后又看到一条过点 A 的直线 c．接着我们想像有另一条过点 B 的直线，它与 c 平行．这条公设说只有一条过点 B 的直线能与直线 c 平行．

我们是能在心里想像、观看各种事物的动物．我们能为生活在朦胧的几乎是黑暗的世界中、靠听觉主导一切的动物，想出一条类似的公设吗？在这种世界里的那条数学公设可能表达为：如果 A 和 B 是两个音，c 是跟 A 谐调的音的汇集，那么有且仅有一个跟 B 谐调的音的汇集存在，它们一对一地跟 c 中的音组成的音程有相同的片断．（这一有关声音的公设是真是假，能否讲得通，我留给读者去思考）．如果我们是靠听觉活动的动物，那么这类公设对我们来说比欧几里得的视觉公设有更重大的意义．像大多数海豚研究者指出的那样，我们必须对海豚生活于其中的那个无重力的、潮湿的世界十分敏感．我们必须时刻记住是声音而不是视觉造成了它们所感受的活生生的世界．要是我们能与海豚用它们的方式联系，大概我们才会发觉它们有多聪明，那时我们可能会大吃一惊．

鲸虽然难以研究，但它确实为研究大和复杂的脑提供了另一个机会.鲸周期性地重复发出长而复杂的声音，但它们也会改变声音，这意味着鲸有良好的记忆力.一次发声的长度可超过半小时而且包含一百万到一亿个信息位.[12)]有人声称鲸太笨，不会计数，但人们很难忘却上述给人留下深刻印象的行为.

作为结论，我们只能说至今还没有证据说明任何动物能进行我们所定义的计数.然而，海豚脑与鲸脑的活力与体积提醒我们，它们具有进行计数所需的智力.

[48]



我们已经探究了从最早期的原始人类到现代人的计数历史，时间跨度大约从五百万年前到一万一千年前．现在继续我们的故事，从农耕业在西亚显露一丝曙光的时代开始．

农耕业的诞生

绝大部分的史前史，都没有提供那时存在文字的证据，从中也看不出有超出简单计算的数学，这大概是因为当时的人没有遇到需要较复杂的数学来解决的问题．石器时代的人会基本的计数就够了，或许还要用到简单的加、减、乘、除．然而一旦出现了农耕业，一切都变了．大约从一万三千年前起，人们开始用镶有坚硬而锋利石器的木棒收割野生谷物．这些谷物是上天的恩赐，可以储藏在山洞里以备日后食用．与肉类不同，谷物即使在温暖的气候下也不会很快变腐．以后，人们开始守护生长野生谷物的土地并通过断断续续的灌水促进其生长．当人们开始保存收集来的种子以备下个季节播种时，真正的农耕业登场了．这导致人们去选择最好的种子，通过淘汰方式来改善未来的收成．在【49】西亚生长的第一种重要的谷物是大麦，它很快成了主要的农作物，是早期麦酒和面包的原料．

由于狩猎－采集者依靠的是野生的猎物和野生的蔬果，所以他们最好的生活方式是组成小的群体，并在相当大的地区内活动．农耕业所利用的是驯化了的动物与栽培作物，使得居住地

人口密度比采猎生活方式时大得多.很快,村庄发展成农耕业的中心.地球上有若干地区各自独立地出现了这一现象.公元前一万一千年左右,最早的这类农耕业便出现在“肥沃新月地区”,该地区从古代以色列西岸的杰里科(Jericho,死海以北的古城),向北延伸到叙利亚的大马士革和阿勒颇(Aleppo,现在的 Haleb),向东南则延伸到伊拉克的巴格达和巴斯拉(Basra),甚至到达伊朗的古代遗址苏塞(Susa)(图 8).第一批这样的农耕业村落出现在土耳其南部和伊拉克北部的扎格洛斯丘陵.晚些时候的村庄包括在公元前八千年左右相当繁荣的杰里科.随着农业村落的发展,其他手工业也迅速出现.陶器制造约开始于公元前六千五百年,编织业与装有轮子的车出现于公元前六千年.

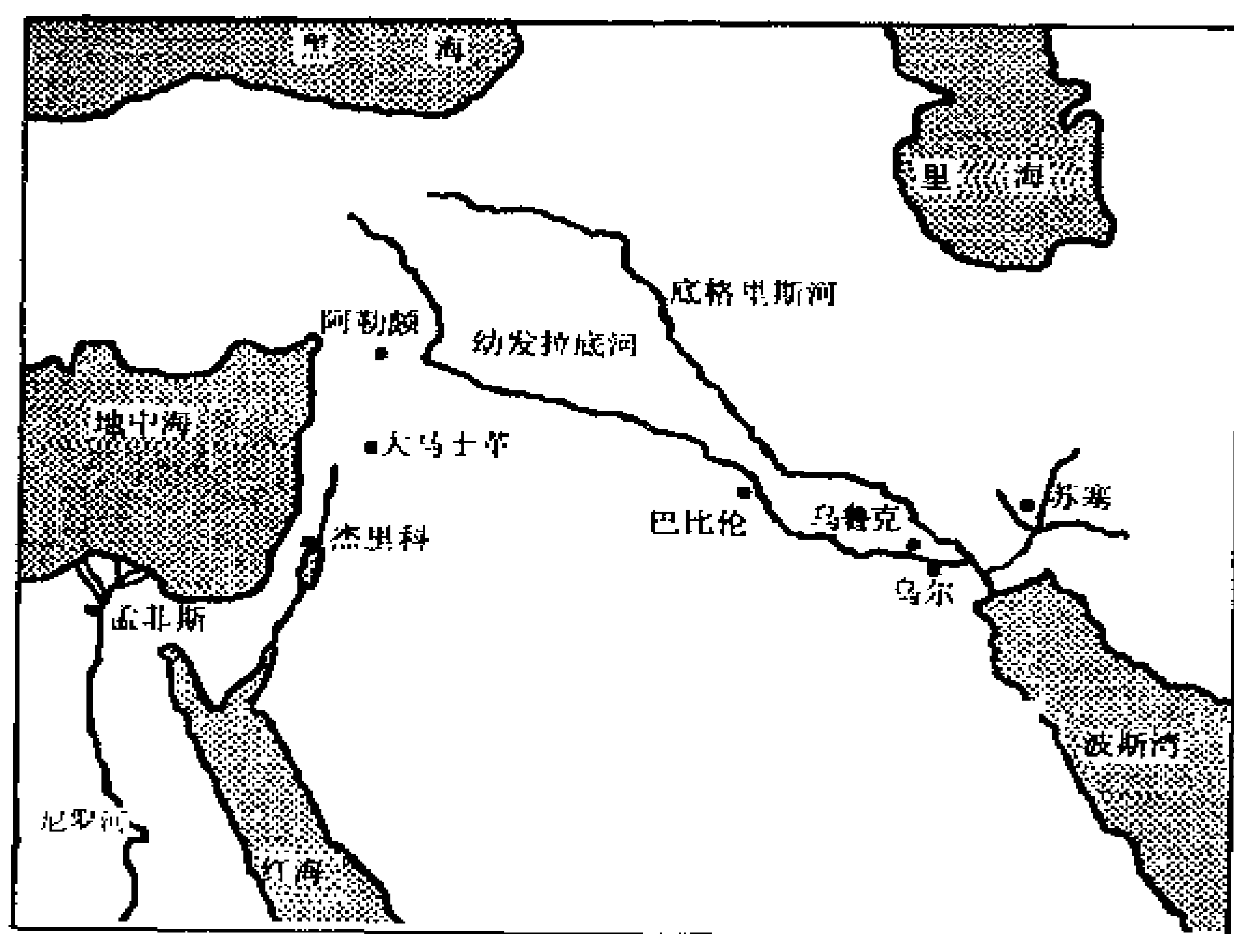


图 8 西亚的肥沃新月地区的地图.该地区西起杰里科(Jericho),北至阿勒颇(Aleppo),东南到达底格里斯和幼发拉底两河的河谷.

生活在村落里的农夫必须解决哪些他们的远亲——狩猎-采集者从未面对过的问题呢？农耕的主要优点是能够产生剩余食物．正是有了剩余的谷物，才能使人们聚在一处并建立起永久的家园，但前提是要能保护好这些谷物并能度量它们有多少．一部分谷物用作当年的口粮，同时必须留一部分作为第二年播种用的种子，还可能要留一部分跟其他农耕业村落交换食物．此外，农田本身需要适当地划分并加以保护．土地的使用导致了计数的新领域，此时不仅要数不同的物件，而且需要丈量土地．这样，自然数与度量之间的联系就建立起来了．

除了管理收获的农作物和土地之外，他们必须把更多的人组织起来去种植、去照料与收割庄稼；他们还得武装起来保护粮食和土地不受侵犯．从事这些活动时，光会计数是不够的．众多的人口、大批贮存的食物和大量的土地划分工作，迫使书记员与祭司们去做加、减、乘、除．统治阶级逐渐形成了，他们的书记员【50】要去计算个人与家庭该缴纳的多种税收．

季节和气候条件对于农耕业特别重要．农夫需要一种能告诉他们种植每一种庄稼的合适的季节的日历．这就需要更多的计算技能以记录下星星的方位并由此确定时令．在文字发明之前的时期（公元前 3500—前 3100 年），古巴比伦人定出的“年”提供了历法计算的实例，这部历法以春分点（3 月 21 日）为一年的开始．第一个月称为牛月，这暗示了该历法制订的时间大约是在太阳于 3 月 21 日左右位于金牛座的时期．这一时期约始于公元前 4700 年．更古老的苏美尔人可能在公元前 5700 年就制订【51】了他们的历法．[1]

所有这些必须的活动——弄清楚土地、人口状况，储存食物的多少和季节变化，刺激着统治者和会计师们去发明能较快捷、较简易地运算自然数的方法．保存数字记录的办法有三种：签筹、结绳和黏土证物．

签筹就是在上面精心做上标记或刻痕的、用来表示数的骨

头或木制的小棍.前面提到过的二万年前的那根狼骨便是原始的签筹.在非洲的扎伊尔境内的爱德华湖的渔区发现的一根骨头提供了另一个例证,它的年代大约在公元前9000年到公元前6500年之间.这两根骨头上都有很多数字图样的刻痕.不过大多数签筹是木制的.普通百姓用它们记录物品、交易和契约(图9).一种流行的方式是用一对签筹来记录债务.一根长而薄的签子被刻上表示债务是多少的刻痕;然后将它劈开成几乎等于全长的两部分,这样它就被分成两根相配的签筹.带大头的那根是本筹,由债权人保存.带小头的那根是插筹,交给债务人.其后的某个日子,当这一对签筹对接在一起时,债权人和债务人双方可以分辨刻痕是否被擅改过,因为这两部分应完全吻合才对.

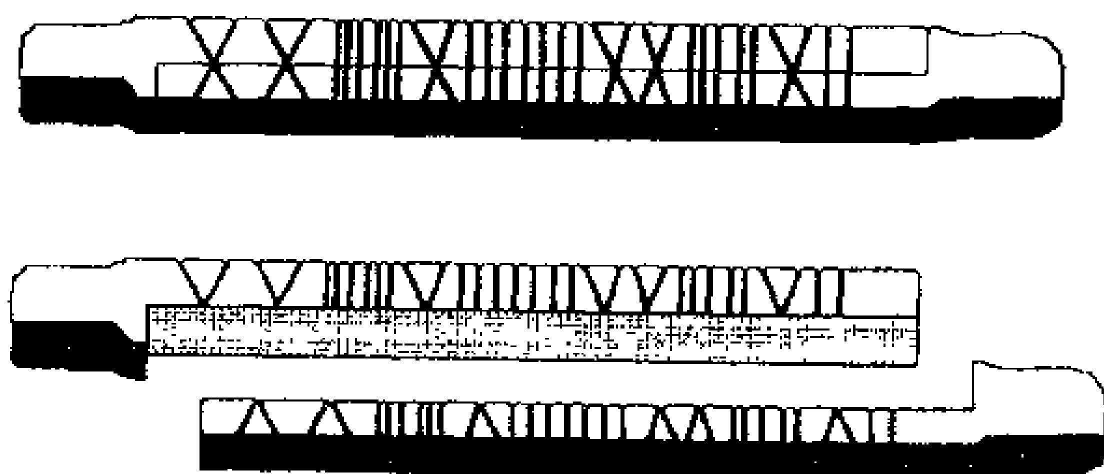


图9 记录工作量的芬兰签筹.长度为25厘米(引自卡尔·梅宁格的《数词和数的符号》.(纽约,多佛出版社,1969),第231页,据照片画制)　【52】

地球上,在非洲、欧洲、太平洋岛屿、美洲和中国都使用过签筹.在拉丁语中,签筹(写作talea)的意思是"刻过的细枝".汉语中的契约一词中的契字分成三部分:上面两部分分别表示带刻痕的细枝和刀,下面是个"大"字.因此,这个汉字象征着"大的刻痕签",即签筹.在英国,有一段关于签筹的有趣的历史记载,签筹在英国一直到1828年还用于记录税收.大量的签筹收藏在国会大厦里.1834年英国政府决定烧毁它们,结果国会大厦意外

地被烧成平地.

第二种表示数的实物是打结的绳.这种方法应用得也十分广泛,在非洲、北美洲、南美洲和中国都发现过它的踪迹.公元前5世纪,中国哲学家老子劝诫人们恢复使用在绳上打结的书写方式①.最先进的结绳是秘鲁的印加人制作的,他们称其为结绳

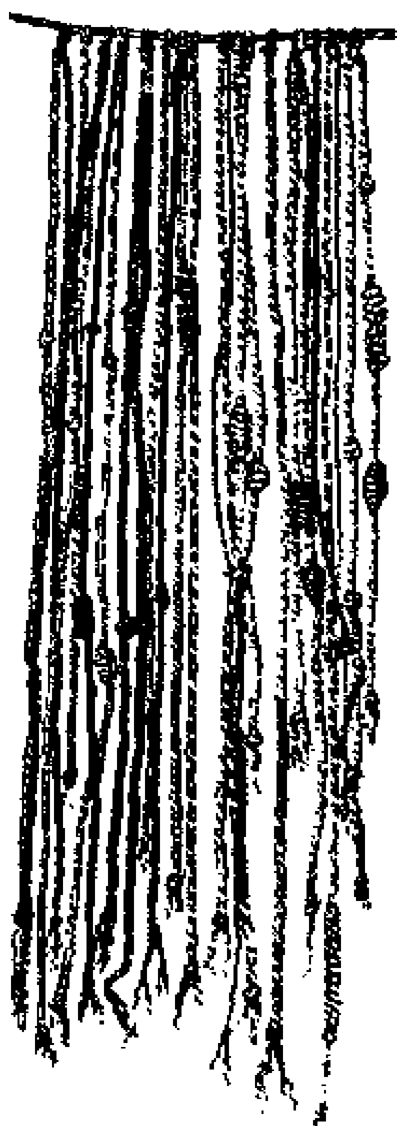


图 10　印加结绳文字,结表示数字.一个数要从绳的上端往下端读.(引自依利诺伊州芝加哥的种族辑绘馆)

① 事实是在被认为是老子所撰写的易经中,有"上古结绳而治,后世圣人,易之以书契"的说法.——译注

语(quipus)并用它们来记录正式的交易(图 10).结绳语包含三类不同的结,在长度、颜色和结串的位置等方面也有各种变化.这种方法相当复杂,甚至可用它记载非数字信息.

第三种用实物记录数的办法最重要:使用黏土制的证物.在长达几十年的时间里,考古研究人员对这些人造的证物迷惑不解,它们都发现于肥沃新月地区的新石器时代(公元前 8000 年到公元前 3500 年)的城市遗址中.这些人工制品(即证物)的出土地域属于最早的农耕区,从巴基斯坦的查胡达洛(Chanhu Daro)到土耳其西南部的贝尔迪比(Beldibi),南及苏丹的喀土穆.最古老的黏土证物来自伊朗地区,可追溯到公元前 8000 年.这些证物呈球形、圆盘形、锥形、蛋形、三角形、矩形,以及其他相配的各种奇异形状.一般地,它们的长度从一到四厘米不等(图 11).

考古学家为这些证物构想了许多功能,譬如可看作是孩子的玩具、游戏的器物、阳物崇拜的象征、妇女小雕像、钉子和弹子等.但如果德克萨斯大学的德尼兹·舒曼特 - 贝塞瑞特(Denise Schmandt-Besserat)提出的理论是正确的话,那么上述猜想没有一种是对的.20 世纪的 70 与 80 年代,舒曼特 - 贝塞瑞特带领下的小组,对从 116 个地方得来的一万多件证物进行了广泛的 【53】 研究,发现它们代表的是特殊的物体而且是用来保存记录的.[2] 在她的著作《文字出现之前》中,舒曼特 - 贝塞瑞特写道:

> 这些证物可以追溯到始于约公元前 8000 年的新石器时代.它们是随着经济的需要发展的.先是用来记录农耕业的收获物,到都市时期便扩大了使用范围,用于记录手工作坊制造的产品.[3]

根据这一论点,这类证物从第八个千年开始(文字发明之前的五千年)就被广泛地使用了.公元前 8000 年至前 4400 年间使 【54】 用的初期证物,形状简单,并以不同形状代表不同类的物体.例

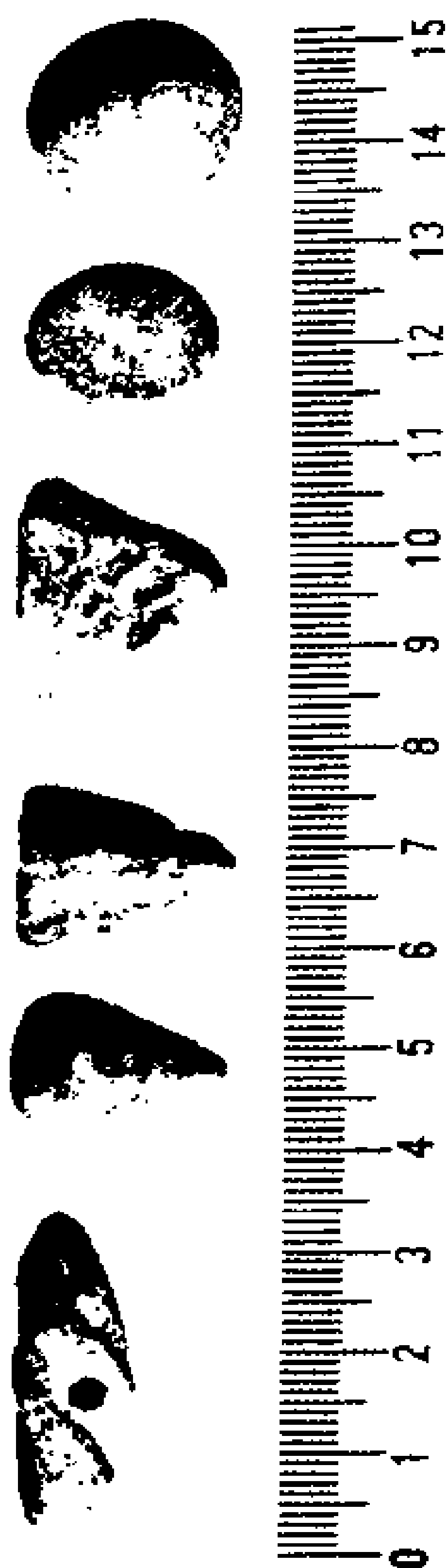


图 11 西亚的计数证物.(照片,承蒙德尼兹·舒曼特－贝塞瑞特和法国巴黎卢浮宫博物馆允许使用)

如,一个卵形的证物表示一罐油,而一个小球形的证物代表一升谷物.[4)]公元前 4400 年以后,人们设计并使用了更多形状的证物,证物上面的标记也越来越多,越来越复杂.在农耕时代的早期(公元前 8000 年至前 3100 年),证物与被说明的物品之间形成一对一的关系.三罐油就用三个卵形证物来计数.四升谷物就用四个小球来计数.这是一种较高级的小棍计数法,用证物来鉴定所计量的事物.此时,证物并不用来表示抽象的数.

苏美尔人创造文字

在铜石并用时代(Chalcolithic Age,公元前 4500 年至前 3000 年),肥沃新月地区发生了惊人的变化,它几乎与农耕业的兴起一样富有戏剧性.这一变化就是从小的村落发展出了真正的城市.城市的成长与更复杂的证物的使用是相辅相成的.第一批城市出现在美索不达米亚平原的南部,即著名的苏美尔地区,位于现在的伊拉克南部.五千年来,这一卓越文明的遗迹隐藏在伊拉克沙漠的黄沙之下,到 19 世纪上半叶被发现之前,甚至没有人想到过它的存在.苏美尔人约在公元前 3500 年到达伊拉克南部并建立了帝国,这个帝国一直延续至约公元前 2000 年被巴比伦人征服.到公元前 3000 年,散布于苏美尔地区的城市已超过十二座,其中尤以乌尔城(Ur)最大.它的居民大约有两万五千人,周边的农耕村落的人口达二十万之众.此时,其他一些城市也已经出现在肥沃新月地区.[5)]

西亚出现的新城市产生了剩余的人力,于是他们从事起专门的商业活动与商品制造业.为了城市的兴旺,必须和其他城市进行商品和原材料的贸易.例如,苏美尔的城市不能从本地得到 [56] 好的木材和石料,也没有像铜、银、金等金属.货物运输与检验货物装载量的需要使对会计的需求量大大增加.正是苏美尔人试图解决这些问题的努力,导致了复杂证物的出现并最终导致文字的产生.

当大麦、家畜或手工制品将运往一个新的地点时,必须准备一份供核查的记录,以使购买者知道,他或她不会受销售者或那些负责运输者的欺骗.这份记录由表明运出货物的数量和类型的一组证物组成.但是销售者不能把这些证物放在袋子里,因为随便什么人都可能偷去货物再偷去相应的证物,使别人以为所运货物没有短缺.所以,肥沃新月地区的城市居民发明了一种巧妙地保护证物的办法.他们用黏土把证物裹在当中,然后把黏土烘干.这就得到了一个内藏黏土证物的坚硬的黏土球.当买主拿到这个球后,可以打碎它取出里面的证物,以验证它们与收到的货物是否相符.真是聪明!

这些塞满证物的黏土球被称为垂饰(bullae)或封套(envelopes),它们首先在伊朗的古代遗址苏塞被发现.最古老的封套源自苏塞以北约150公里处的法鲁卡巴德(Farukhabad),年代可追溯到公元前3700年至前3500年.[6]但是在考古遗址中发现的封套还有另外一个特征.如果你是个运货人并负责把货物运至第二个运货人那里,并由后者来完成货物的交付.那么你必须证实你如数交出了货物.但黏土证物隐藏在封套内,你如何做到这一点呢?答案是:在烘干封套之前,先在其外表面上刻印或绘制出包在里面的证物的图案.每一个拿到封套的人都能轻而易举地从外表的图案"读"出里面含有的证物.因此,当你把附带有封套的一批货物交给运货者时,他可以在其表面读出所托运的货物是什么和有多少.到达目的地后,买主打碎封套,验证外面的图案标记与里面的证物是否相符以及到达的货物是否够数.

57] 在聪明的苏美尔人意识到包裹在封套中的证物其实是不必要的之前,上述系统运行得很好.实际上,真正需要的就是在黏土表面烘干的证物的印记.所以,他们舍弃了封套而改用简单的黏土板,于是文字诞生了.最初,黏土板保持着有刻印标记的封套的基本特征.每一个证物仍代表一种特指的事物,因为数还没有从被数(shǔ)的对象中抽象出来.这种类型的计算被德尼

兹·舒曼特－贝塞瑞特称为具体的计数(concrete counting),约在公元前3500年至前3100年间用于封套和泥板上.最后,约在公元前3100年左右,苏美尔人将表示事物多少的数与事物本身分离开来.抽象的数字被刻印在黏土上,同时代表被计量的事物的象形文字也用书写工具刻在黏土上(图13).数与所数(shǔ)对象的分离非常有效,它可以用基数来标记事物的数量,再跟单独用于标记事物的象形文字相配,用起来很方便.一旦事物不再与数联系在一起,则代表它们的象形文字就能被推而广之,用来表示许多不同的概念,于是文字诞生了.舒曼特－贝塞瑞特为我们做出如下概括:

> 证物使我们对文字的性质有了一种新的洞见.它们证明,在近东,文字是通过计数图案形成的;事实上,文字是抽象计数的副产品.当数的概念与被数的各种事物的概念被抽象出来后,象形文字就不再被限制在以一一对应的方式显示事物单元的数目.随着数字的发明,象形文字不再限于计量而为人类打开了其他的奋斗领域……抽象数字的发明是数学的开端,也是文字的发端.[7]

人类最辉煌的创造之一——文字,是苏美尔人在公元前3500年至前3100年之间获得的.之前,文化的继承都是靠口头表达或靠动作示范而传达给后代的.有了文字,一切都变了.人们不仅能把信息传给自己直接的继承者,而且能传达给相距遥远的人和隔着许多代的后人.通过对第一批文字的考察,我们隐约看到了一幅古代人是如何生活与怎样计算的图景.正是记录【58】数目的需要,成为文字形成的最初的动力.

苏美尔人的最早的文字只是些刻印在软黏土上的证物的印痕,出现的时间约在公元前3500年.接下去是出现在约公元前

3 100年的表示数的证物的印痕加上代表事物的象形文字.为在黏土上、木头上或骨头上雕刻,使用了形如圆柱状铅笔的刻字笔.使用这类文字的目的是记录日期和保存物品清单.约在公元前3000年左右,苏美尔人从早期的文字发展出一种楔形文字.有了楔形文字,证物的图形化表意文字被表音符号所替代,并演化出一种单独的抽象数字体系.早期的文字是自右向左柱状排列的.这一习惯在公元前3000年以后才改为从左向右横向书写.苏美尔人艰辛努力的成果,由于使用的书写媒体是烘干的黏土,才得以一直保存到今天,历时五千多年,这真是我们的幸运.

苏美尔人的数学

对苏美尔人的数学,人们所知甚少,但从现存的他们的泥板可知,他们显然知道四种基本的算术运算:加、减、乘和除.苏美尔人的社会已复杂到需要使用自然数的运算技能.我们从最早的代表数的证物就可以看出,苏美尔人的数系比更早期的2元计数体系,5元计数体系甚或10元计数体系要复杂,因为它是建立在六十和十基础上的六十进位制体系.很多泥板好像是学生(未来的书记员)在上实践课时的作业.我们从这些泥板中得知,苏美尔人会处理非常大的数和非常小的数,既会用整数也能算分数.为了刻写数“一”,书记员需把圆柱形刻字笔按一定的角度压进黏土中.这样就留下一个半圆形的印记,它看起来像个挂在一条边上的大写字母“D”(图12).重复使用“一”的符号就表示较大的数.这些用来表示数的数字的汇集要跟其他文字分开[59]写,置于一个矩形之中.当刻到十时,刻字笔垂直地压进黏土形成一个小圆圈(○).但是苏美尔人的数系并非以十,而是以六十为基底的.一到五十九用代表“一”的(◗)与代表“十”的(○)的组合来表示.至于六十,是将一个大的“D”形符号刻印在黏土上.下一步是表示600或60·10,使用内有一个小圆的大的“D”(◉).60×60或3 600是一个大圆(○),而36 000(即10·60·60)

是一个大圆内套一个小圆(◎).早期苏美尔人使用的这些数的形状列在图 12 中.

【60】

我们现在的数系依赖于每个数字在一个数中的位置.三十七和七十三不同,因为三和七这两个数字所处的位置不同.因此说我们的数系是位值制的数系.早期苏美尔人的数系不是位值制的,因为书记员只是把表示各种值的符号放在一起以得到一个预期的和.跟我们现代的体系不同,那些符号不会因为在不同的位置而代表不同的值.后来的楔形文字是用一种特殊形状的刻字笔压在黏土板上刻印出来的,形如一个带小尾巴的三角形.

	早期苏美尔人	巴比伦人		早期苏美尔人	巴比伦人
1			10		
2			11		
3			12		
4			20		
5			30		
6			40		
7			50		
8			60		
9			600		

图 12 早期苏美尔人和巴比伦人所用的数.苏美尔人的楔形文字被巴比伦人所采用,因此,后期苏美尔人的数几乎跟巴比伦人的数一样.

我们知道，苏美尔人到公元前 2400 年已在签帐单了，他们按夏斯（shars，一种度量单位）丈量土地，按泰勒恩特（gus，度量单位）称重量，按卡（ka，度量单位）来度量流体，并且计算利息．最值得注意的是，他们使用二分之一、三分之一和六分之五这些分数．这是迄今所知的认为分数也是数的最古老的例证．苏美尔人的数系的显著特点是：以六十为基底（并以十为其中间步骤），并且已经开始使用分数．这使得苏美尔人既能写出大的数，也能写出小的数．[61]

我们无论怎样强调苏美尔人使用分数的重要性都不为过．自从开始用有名数计数，人们才开始对于数的抽象，当时会用的只有自然数．此时苏美尔人引进了一类新的数．如果第一批数的命名可追溯到快速语音语言发展的年代（近十万年前），就是说从自然数到分数的旅程竟花了近十万年的时光！分数真是姗姗来迟．况且，我们将看到埃及人和希腊人不像苏美尔人那样全盘接受分数的思想．

卓越的巴比伦人

大家知道，大约在公元前 2000 年左右，阿莫里特人侵入苏美尔王国，征服了它的城市，并于公元前 2006 年摧毁了乌尔城．于是，这些人成了著名的巴比伦人，建立起一个包括现今的伊拉克、约旦和叙利亚在内的庞大帝国．他们修建了众多城市，其中包括著名的巴比伦城，这个帝国一直延续到公元前 538 年，那年巴比伦城落入波斯的居鲁士之手．

巴比伦人征服苏美尔王国后，延用了苏美尔人的楔形文字和他们的数学．现已发现数千块巴比伦人的楔形文字泥板，大都属于公元前 2000 年和公元前 600 年左右的两个时期．这些古老的记录给我们带来了有关巴比伦数学的大量信息．巴比伦人保留了苏美尔人基于十和六十的基本数系，但是放弃了代表 60，$10\cdot60$，60^2，$10\cdot60^2$ 和 60^3 的特殊符号：他们只保留了两个符号，



图 13 苏美尔泥板.压印在泥板上的数字是33,泥板上所画的图形文字代表一罐油,这些代表1的早期数字外观上是一长道.(承蒙德尼兹·舒曼特-贝塞瑞特,奥斯汀的得克萨斯大学,和加拿大安大略省、安大略皇家博物馆允许使用)

一个是带垂直小尾巴的三角形,叫做尖劈(𒁹),仍表示1;另一个是两侧都带小尾巴的三角形,叫做针钩(<),代表10.(但是有三个例外,即分数二分之一、三分之一和三分之二,分别都有自己特定的符号.)这一特色使他们的体系几乎成了古代各民族中独一无二的数系.他们使用的位值制体系既能表示大的数也能表示小的数.

我们通常使用的十进制数系也是一种位值制体系,能够表示大的数和小的数,并能实行复杂的计算.例如1代表数"一", [62] 10就是数"十",而100表示数"一百"."1"在一个数中所在的位置会告诉你应赋予它的数值.不妨考虑743这个数.在非位值制体系中,这个数可能是$7+4+3=14$.但在我们的体系中,它应当是$7\times100+4\times10+3=700+40+3$,或者说七百四十三.如果在我们的体系中表示分数,我们就放一个小数点在右侧,接下去的数字顺次表示十分之几,百分之几,等等.因此,57.32代表

$$5\times 10+7+3\times\left(\frac{1}{10}\right)+2\times\left(\frac{1}{100}\right)=50+7+0.3+0.02=57.32.$$

巴比伦人的位值制体系以同样的方式运作，但以六十而不是十为基底．所以，在巴比伦人的数系中，621 这个数(这里使用阿拉伯数字)不是六百二十一，而是：

$$6\times 60^2+2\times 60+1=21\ 600+120+1=21\ 721.$$

当然，他们当时用来表示 621 的符号不是我们使用的阿拉伯数字符号，而是他们自己的三角状的尖劈符号．因此，数 21721 就写成：

𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹 𒁹

他们可以用这种位值制体系展示分数．例如，4.5 的表示法是在𒁹𒁹𒁹𒁹的右边跟着<<<．𒁹𒁹𒁹𒁹表示4.5中的 4，而<<<(或者说三十)表示六十分之三十，这跟十分之五是一样的．因此，仅用表示一(𒁹)和十(<)的两个符号，巴比伦人根据他们的位值制体系就能写出非常大和非常小的数，并能用它们有效地进行计算．学者们迷惑不解的是为什么苏美尔人选定以 60 为基底，而巴比伦人又继续使用之(大概在苏美尔人之前，尚无文字的西亚人就使用过这种进位法，作为证物计数体系的组成部分)．一个可能的解释是，60 恰好能够被许多较小的数除尽．即，60 可以被 2，3，4，5，6，10，12，15 和 30 整除．这可以使许多基本的计算变得很简单．苏美尔人和巴比伦人的体系被广泛地用于计算重量、大小及土地面积——60 的可除性使他们得益匪浅．

不幸的是，巴比伦人的数系有两个重大的缺陷．第一，没有[63]像我们的零那样的占位符号来表示哪一个六十的幂次是空位．第二，没有表示一个数的分数部分从何处开始的小数点．我们只好假定当时的读者必须从问题的上下文来作判断．这使得巴比伦人写出的数往往是多义的．例如写出<𒁹𒁹 𒁹𒁹 <<<就可能表示下列数中的任何一个：

(a) $12 \times 60^2 + 2 \times 60 + 30 = 43\,350$;

(b) $12 \times 60^3 + 2 + 30 \times \left(\frac{1}{60}\right) = 216\,002.5$;

(c) $12 \times 60 + 2 + 30 \times \left(\frac{1}{60}\right) = 722.5$;

(d) $12 + 2 \times \left(\frac{1}{60}\right) + 30 \times \left(\frac{1}{60}\right)^2 = 12.041\,666$(近似值).

可以认为,根据所要解决的问题的上下文,书记员知道此处的十二、二和三十在位值制中的取值.占位符号或零直到巴比伦帝国灭亡两个世纪以后的亚历山大大帝时代才开始使用.那是用两个斜写的尖劈组成的专门符号放在数字之间,起到零的作用.

尽管忽略了零和小数点,巴比伦人的数字体系还是优于埃及和希腊的非位值制数系.巴比伦人显然达到了较高的数学水平.考古出土的许多泥板记有诸如乘法、数的平方、倒数、立方、平方根和立方根的各种数学表,还有计算利息的表格.巴比伦人也懂得怎样用代数方法解决问题,并远远超过了埃及人的水平.他们知道如何在一个等式的两边作同样的加或乘以把它化简.他们能够做简单的因子分解.他们像我们一样不用文字代表数量,但是使用像容积、宽度和长度这样的术语.[8)]

巴比伦人甚至能解有两个未知数的联立方程,以及某种二次方程和一些三次方程.他们也知道所谓的毕达哥拉斯定理①,即直角三角形的两直角边的平方和等于斜边的平方,用符号表示可写成 $A^2 + B^2 = C^2$,其中 A 和 B 是两直角边的长度,C 是斜边的长度(图 14).古代学者把这一发现归功于生活于公元前 6 世纪的希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras).然而后来的许多发现都清楚地表明,远在毕达哥拉斯之前,巴比伦人和中国人就知 **【64】** 道这个定理(中国人现称之为"勾股定理").存在无穷多的三元

① 亦称勾股定理.——译注

整数组满足这个定理.这种三元数组称为毕达哥拉斯数①.例如,三元整数组三、四和五就满足毕达哥拉斯定理,因为如果我们有一个两条边的长度分别为三和四的直角三角形,那么较长的斜边的长度必是五.我们知道:

$$3^2+4^2=5^2 \text{ 或 } 9+16=25.$$

巴比伦人肯定知道勾股数,因为他们作出了这种三元数的表格,看起来他们还在这个基础上向前迈了一步.如果我们有一个直角三角形,它的两条边的长度都是1,则斜边的长度是$\sqrt{2}$.这一点不难看出,只要令 X 为斜边的长度,然后用勾股定理解出 X.

$$X^2=1^2+1^2=1+1=2.$$

当 X^2 等于2时,X 等于$\sqrt{2}$.但$\sqrt{2}$是什么数?结果证明它既不是自然数也不是分数,而是全新的一类数.在一块泥板上,巴【65】比伦人具体计算出$\sqrt{2}$为1.414 212 9.$\sqrt{2}$精确到十位的近似值为1.414 213 562.巴比伦人的这个值的误差大约只有0.000 000 7,后者确实是个非常小的量.[9]巴比伦人意识到了他们正在讨论一

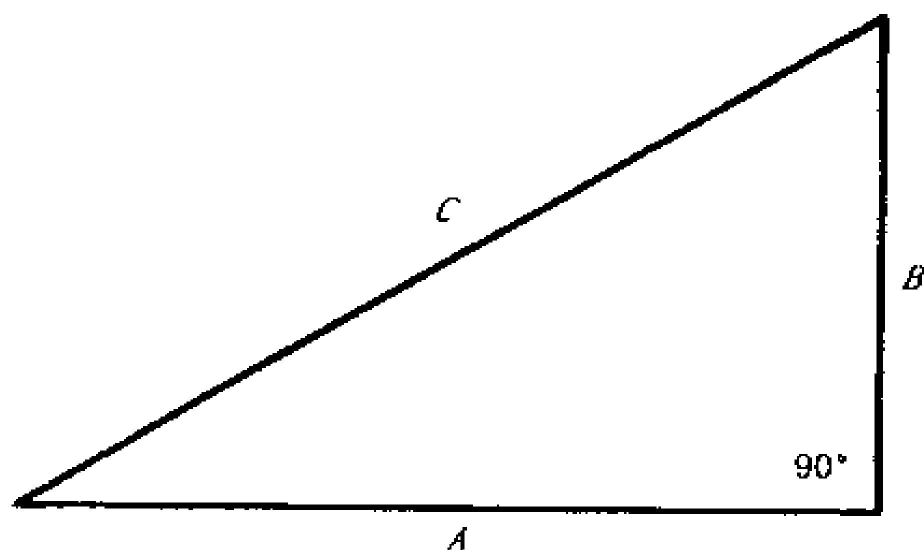


图 14　展示毕达哥拉斯定理的直角三角形:$A^2+B^2=C^2$.

①　亦称勾股数.——译注

类新的数吗？目前还没有证据说明这一点，但他们已如此接近了发现无理数．而无理数要得到最终的确认尚需等待十五个世纪以上，这真令人吃惊．

巴比伦人将数学应用于天文学．他们能测算太阳、月亮和五颗可以用肉眼看到的行星（水星、金星、火星、木星、土星）的周期运动．根据这些测算，他们建立了一个算术模型，用以预测在星空背景下上述星体会合以及排成一线的时间．

那么巴比伦人的数学缺些什么呢？我们已说过在他们的数系中没有零和小数点．此外，他们利用数学显然是为了解决实际问题而非阐明一般规律．他们并不区分精确解与近似解，看来他们也不需要数学证明．尽管存在这些不足，巴比伦人确实达到了他们那个时代最高的数学水平，超过了与其同时代的埃及人．

概括一下已为苏美尔人与巴比伦人展示的西亚地区人们的成就，我们可以列出下面一些最重要的内容：

(a) 创造了文字；

(b) 引入了分数；

(c) 发展了位值制数字体系；

(d) 数学从简单的对事物的计数（记帐）演进到问题的求解（代数）与面积的度量（几何）．

我们已经发现了成千上万的苏美尔人和巴比伦人的泥板，其中有许多仍然未被译解．由于直到 20 世纪 70 年代以后才考古发掘出古代这一时期的城市（例如叙利亚的埃伯拉（Ebla）），所以关于西亚这一时期的历史仍在写作之中．新的发现可能会要求我们重新评价这些非凡的人们的数学成就． 【66】

埃　及　人

古埃及人完成的伟业，以及他们帝国悠长的历史，常使历史学家给予他们的数学以很高的评价．而仔细的研究表明，这种赞誉有点言过其实．

古埃及从大多数标准看都不乏奇迹.他们的文明大约始于公元前第五个千年中的某一时期,并一直延续到公元前332年被亚历山大大帝所征服,历时四千年.很早以前,埃及人居住在两个王国里:位于尼罗河河谷的上埃及和位于尼罗河三角洲的下埃及.在公元前3500年至前3000年间,梅内斯(Menes)将它们统一为一个大的帝国,定都在孟斐斯.埃及在此后的三千年里成为一个伟大的世界强国.唯一的一次分裂发生在公元前1720年至前1570年间,那时来自小亚细亚的喜克索人(Hyksos)征服了埃及的三角洲地区.

埃及人从公元前第30世纪到第三王朝时代(约公元前2500年)达到了他们早期文明的高峰.在这一时期,他们建造了伟大的金字塔;也可能就在这个时期,他们为他们的数学奠定了基础,尽管尚无直接的证据.他们登上辉煌高峰的速度十分迅速,恰在公元前3000年前夕,他们掌握了用于建筑业的切割石块的技术,到公元前第29世纪开始的时候,已在修建吉萨大金字塔了.[10)]

在尼罗河畔大量种植小麦的埃及文明十分强大,它的力量造就了埃及人的耐久力和坚韧性.这种力量反映在他们伟大的纪念性建筑及其社会的漫长历史中,可是也反映在他们的数学从公元前第三个千年以来几乎没有什么进展(好像完全没有).他们不需要更好的数学,因为已有的数学已完全够用了.

埃及人发展了两种文字.第一种是象形文字,它在公元前3000年左右出现时是些简单的图画式符号,可能受到过苏美尔人的楔形文字的影响.象形文字渐渐发展成一种绘画文字与表音符号的组合体,并作为正式文字用于纪念性建筑和庙宇中.这种文字的主要用途是记录法老个人的成就,这种习俗一直延续到公元前1世纪.

第二种文字称为僧侣文,用于帝国日常事物的管理.僧侣文不如象形文字正规,不过更抽象,通常只需要用较少的笔画来

写.我们正是通过僧侣文了解到埃及数学的大部分内容的.数千份用墨水写在纸草书卷上的文稿被保存下来,不过大多数都出自帝国的末期.有两本著名的纸草书卷为我们了解埃及数学带来了巨大的便利,一本是赖因德(Rhind)纸草书,大约写于公元前1650年,但它显然是早在公元前2000年至前1800年间写成的书卷的抄写本.另一本是莫斯科纸草书,它的成书年代约是公元前1890年.两本书中都含有埃及的书记员们共同面临的实际问题的例子.赖因德纸草书是含有八十四个问题的内容广泛的文献,而莫斯科纸草书只有二十五个问题.负责用僧侣文在纸草上书写的书记员是僧侣中的一个独特阶层,通常是些受信赖的奴隶.他们一般在作为政府机构的庙宇里从事秘书和会计工作.

埃及人的数系是以十为基底的.象形文字中用一种笔画(|)的组合代表从一到九这几个数,而在草写的僧侣文中只利用这种笔画来表示一到三,从四到九都有各自独特的符号(图15).另外有符号分别表示十、百、千、万甚至更大的数.这里没有为同一符号因在不同位置而指定不同的值.所以这种体系纯粹是加法性的.为了读一个数,只需把其中不同符号代表的值相加.这可能使大数的表达变得很累赘,不过埃及人确实设法记录大到几百万的数.早期的文字通常反映作者的个性,他或她会选择使用自己特殊的符号.直到公元前第15世纪,文字才达到了适度的标准化.

像巴比伦人一样,埃及人也使用分数.然而他们的体系要笨拙得多.除了三分之二和四分之三以外,他们的所有分数都是单分数,即分子必须是一,而分母可为任意整数,因此,一切分数在形式上都是$\frac{1}{n}$.这意味着分子大于一的普通分数必须表示成几【68】个单分数的和.例如,$\frac{2}{7}$要写成$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$.其他的分数可能要用到一组更复杂的单分数,例如,$\frac{13}{21}$变成了$\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{126}$.显而易见,

把所有的分数都表成单分数既繁琐又易引起混乱. 为了进行单分数的计算, 埃及人不得不求助于大量的表格. 例如, 有一张表格列出了一组由单分数加倍后得出的单分数, 即把形如$\frac{2}{n}$的分数写成单分数. 实际上, 把分数写成单分数的和的方法并不唯一. 这意味着两位书记员可能把同一个分数写成两种形式, 给辨认工作带来了困难.

广泛地使用单分数可能是由埃及人的记号体系造成的. 在 69] 象形文字中, 分数写成在整数上方加个椭圆形(图 15); 而在僧侣文中, 从五分之一起通常写成在整数上方加个点. 因此, 这种记号体系使得写单分数非常简单, 因为此时实际上只需要写分母; 而写任何其他不是单分数的分数就困难得多. 虽然也有专门的符号表示二分之一、三分之二和四分之一, 但埃及人对使用单分数的约定限制了他们在数方面的发展. 埃及人使用单分数的

	象形文字	僧侣文		象形文字	僧侣文
1			100		
2			1 000		
3			10 000		
4			100 000		
5			1 000 000		
6			$\frac{1}{2}$		
7			$\frac{1}{3}$		
8			$\frac{2}{3}$		
9			$\frac{1}{4}$		
10			$\frac{1}{5}$		

图 15 古埃及的象形文字和僧侣文中的数字.

影响远远超出了他们自己的文明，单分数也为罗马人所用并进入到中世纪的欧洲.[1]

虽然埃及人对分数的处理一般不如巴比伦人的以六十为基底的六十进位制体系，但它也有一个优点，即本身就显示了哪一个数是分数，巴比伦人的体系则需要读者从上下文中猜测哪些数是分数. 埃及人能熟练地使用算术四则运算，不过对于乘、除两种运算，其性质也是在做加法. 当两个数相乘时，他们只是列出其中一个数的倍数：从一倍开始，然后以二的幂次倍递增，即二倍、四倍、八倍，等等. 下面是 7 乘 11 的例子：

/1	7
/2	14
4	28
/8	56

斜杠放在那些加起来等于 11 的 7 的倍数前（1 + 2 + 8 = 11）. 我们把右边一列中对应的数加在一起就得到结果：7 + 14 + 56 = 77. 乘法按加倍的方法来做在埃及人之后又沿用了几百年；由于它在东欧人中很流行，现在被称为俄罗斯农夫法. 这一直是普通人在日常生活中做乘法时最喜欢用的方法.

做除法就需要点小技巧了，不过它也依赖于同一种程序. 如果要计算 187 除以 11，我们从除数的加倍或减半开始，然后进行选择直到适当的组合加起来等于被除数为止. 【70】

/1	11
2	22
4	44
8	88
/16	176

从右边一列我们看到 11 + 176 = 187. 因此，我们把左边一列中对应的数加起来就得到商数，即 1 + 16 = 17.

除了算术四则运算，埃及人还能以叙述的方式解出很有限

的一些代数与几何问题. 为什么以叙述的方式呢? 因为他们几乎没有代表代数运算的符号. 加与减的符号分别表示为一个人走进(加)或走出(减)房屋. 在代数方面, 他们解决形如 $x + ax = b$ 和 $x + ax + bx = c$ 的含有一个未知数的一次方程. 他们也解决过一些含有一个或两个未知数的简单的二次方程, 用现代的记号写, 这些方程就是 $ax^2 + bx + c = 0$ 或 $ax^2 + by^2 = c$. 在几何方面, 他们有一套计算面积和体积的法则, 其中一些法则是准确的, 而另一些只能得出近似值. 在解决许多代数问题时, 他们凭借的是所谓的试位法(false position). 用这种方法, 书记员去猜方程中称为“堆”(heap)的未知数应取的值. 然后他把这个值代入方程中看其是否正确. 如果它不满足方程, 他再对它做适当的调整, 直到得出正确的值为止.

人们常常称道古埃及人知道毕达哥拉斯定理, 但是并无直接的文字证据. 不过, 他们的测量员可能真的知道, 把一根绳分成三段, 分别等于三、四、五个单位长, 那么用它们围成的三角形是直角三角形. 像巴比伦人一样, 埃及人也不知道无理数(即那些不能表成两个整数之比 $\frac{p}{q}$ 的数), 他们只使用整数和分数来表示代数方程中出现的数的平方根. 他们对 π 的一个估值来源于圆面积的公式 $A = \left(\frac{8D}{9}\right)$ (其中 A 是面积, D 是直径). 这暗示

71] 了 π 的值为 3.160 5, 误差小于 1%.

根据对金字塔的大量研究, 有人宣称他们已揭示出埃及人知道某些重要的数学关系. 可是古埃及人自己的文字记载并不支持这种说法. 虽然埃及人的数学落在巴比伦人的后面, 但他们在测量方面的确做出了迷人的业绩. 按照戴维·E·史密斯《数学史》一书中的说法, 大金字塔各边长的最大误差仅为 0.63 英寸, 他指出, 这只是总长的 $\frac{1}{14\,000}$. 精密性的第二个例子是金字塔各棱角的误差不超过(1 度中的)12 秒, 它只是直角所含 90 度的

$\frac{1}{27\,000}$.[12] 如此高的精密性有多少应归功于精细的技术，有多少要依赖于复杂的数学，目前还不得而知.

除了为工人分面包和麦酒、测量建筑物等日常事物外，埃及人需要一部好的历法.他们以生长在尼罗河谷的小麦为生，必须弄清河流的泛滥和改道跟时间的关系，埃及人的一年包含 12 个月(每月 30 天)外加 5 个(宗教)节日，共 365 天.这样会少四分之一天.他们没有像我们那样每隔四年在二月份增加一天以做调整.这意味着这种不作调整的历法会慢慢地与季节不符，要经过 1 460 年它的日期才会再次与季节相符.根据这一事实，人们指出这部埃及历法是在公元前 4241 年、或是在公元前 2773 年制订的.[13] 然而，埃及人制订历法并不像巴比伦人那样要依据整个恒星星座，而只是依据单颗恒星——天狼星.因此，他们的天文学不如巴比伦的天文学.他们的历法以正好在日出前可在地平线处看到天狼星为起点，此即夏季的第一天.之所以选定这一天，因为这天正是尼罗河开始涨水的日子.

总之，埃及的数学非常古老，大约在公元前第三个千年的前半期逐渐形成，以后就定型了，很少再有发展.[14] 埃及数学落后于巴比伦数学，在二至三千年的岁月中几乎处于静止状态.关于数，埃及人的分数概念比巴比伦人的更原始，他们不了解数量可 [72] 以用单个的分数而无须用单分数的组合来表示.他们将数学作为实用的工具，在其中我们找不到数学证明.从纸草书上记录的问题类型看，我们猜想他们有时是为了娱乐的目的而解题的.[15]

为什么埃及的数学开头很顺利，其后就停滞不前了呢？如果我们假定数学的发展依赖于祭司和书记员能自由支配的时间，那么埃及的数学应该在埃及帝国长达数千年的时间里达到相当高的水平.正如我们在前面指出的，数学和科学的发展取决于需要，而跟有闲暇的时间无关.当埃及社会从公元前 3500 年至前 2500 年间忙于组织修建金字塔时，他们需要一种能解决日

常实际问题的数学．一旦大功告成，他们的数学便定型而不再前进了．这对我们肯定是个教训．

数、计算和问题

我们已经看到基础性的计数用于问答"有多少?"的问题．算出一个集合的基数的能力有助于解答"如何计算该集合所含的元素"的问题．早期人类需要一种方法，用来准确地说明物品的汇集里到底有多少东西．自然数和计数的发现就解决了这个问题．当继续往下探索数的发展时，我们将会看到数学的发现往往是对解决问题的一种回应．这种认识有助于我们更好地理解数学到底是什么，我们作为人类又是如何跟它联系在一起的．

狩猎－采集者会计数，看来这种程度的知识对他们已够用了．农耕业开始之后，我们的祖先面临着一大堆新问题，他们设法管理他们新型的生活方式，有关数的学问又成了他们的帮手．苏美尔人和埃及人最早记录的问题是用散文写就的．简单的例子可能是这样叙述的：如果一个工人需要三条面包，那么一百四十个工人需要多少条面包？或者问，有三英亩、七英亩和九英亩土地，他们合起来的总面积是多少？叙述问题的这种方式称为修辞代数学（rhetorical algebra）．古人没有我们现代用来表示量和运算的符号体系，所以只好使用那种办法．用修辞方法来表述又慢又繁，还给不同的人以不同方式表述同一个问题留下了空子，因此没有标准可言．

73】

现代的符号代数用数学符号代替词语，此时问题被简化，也容易做到规范，解决起来更方便．我们还能利用符号来表现各类不同问题的特征．这些问题曾在历史上引发了对新一类数的寻找．所需的符号非常简单，我们将使用四种运算符号 +，－，·（有时也用 × ）和 /，分别代表加、减、乘和除．并用字母表中最后的几个字母代表那些将成为解的数．我们将用方程作为问题表述的形式，方程左边的数值要用右边的一个相等的值来平衡，并用等

号(=)把方程的左右两边分开.等一会儿我们还会加上几条进行简化的规则.至此,我们需要用到的将数结合起来的几个符号和代表未知数的字母就齐备了.

为了了解如何把问题求解的修辞方法转化为现代的符号方法,我们选用下面的例子(古埃及可能就有这样的例子):如果有七个工人,每人可得四升淡麦酒,他们的工头则要拿双份,问共需准备多少淡麦酒?

首先,我们把这些话改成方程的形式:所需准备的淡麦酒总量等于七个人每人四升加工头的两个四升.从修辞代数转变成符号代数的主要一步称为"词中省略"(syncopation),是公元3世纪的希腊数学家丢番图(Diophantus)首先使用的.在经过"词中省略"的代数中,我们把某些词加以缩写.关键词被缩写后,我们得到:T.B(啤酒总量)等于七个W每人四升加F的两个四升.现在我们用等号代替"等于"这个词,于是得到:T.B=七个W每人四升加F的两个四升.

问题的叙述越来越短,也就越接近我们的符号表示法.当使【74】用运算符号+,-,·和/,以及代表数词的数字,我们便有:T.B=4升·7W+2·4升F.接着,我们用大写字母X来代替T.B,这是问题中的未知量.我们还可以抹去其余的词,因为我们知道答案是麦酒的升数.

$$X = 4 \cdot 7 + 2 \cdot 4.$$

现在,我们已摆脱了词语可能引起的混淆,可以通过做两次乘法和一次加法解决这个问题.答案是三十六升麦酒.这个简单的问题对我们来说似乎很容易,不过并不是对所有的人都那么简单易懂.你可以想像,在人们只会用修辞形式叙述整个问题的古代文明社会,要处理诸如财产的分配、报酬的给付、赋税的征集等等问题时会遇到什么样的混乱和争吵.

基本的代数问题,无论是用修辞的形式还是用符号的形式表述,其目的是为了找出一个数.为此,我们要对其他的一些数

进行加、减、乘、除四则运算.但是,我们从那些数出发,经必要的运算就一定能得到那个作为答案的数吗?这个难题困扰着古人,因为他们知道的数系很有限,还无法在所有的情形下给出有用的结果.

如果我们能得证:施用于数的一种特别的运算总是导出另一个属于同一类的数,那么,我们说这些数在那个运算下是“封闭的”.

例如,自然数在加法下是封闭的.为什么?因为无论何时两个自然数相加,我们得到的结果总是另一个自然数.然而,自然数在减法下不是封闭的,因为两个自然数相减可能得出并非自然数的玩意儿.例如,$3-7=-4$,或者说三减七等于负四.这个奇怪的 -4 是什么?不管它是什么,总不是个自然数.

封闭的数系:称数的一个集合对一种运算是封闭的,如果该运算每次作用于集合中的数都导出该集合中的另一个数.

5] 我们可以把这个简单的封闭概念用于符号代数,以理解我们的祖先遇到的数学疑难之所在,以及他们为什么在理解抽象关系时会遇到麻烦.当考虑用符号代数表示的不同类型的问题时,我们会看到埃及人和巴比伦人的局限之处.例如,他们不会解下述简单的方程:$x+7=4$.这个方程的解是 -3——他们并不认识的一个数.再举一例:$x+2=2$,它的解牵涉到 x 为零——又一个不包括在他们的数系中的数.

简单地表示一个数自乘的记号是指数.例如,$7\cdot7$ 是 7^2,$7\cdot7\cdot7$ 是 7^3.我们也可以对未知数使用指数记号.例如,早期的农夫可能会遇到这样的问题:如果我们的土地是方形的,占地 100 单位,问每边为多少单位?列出方程为 $x^2=100$,或每边 $x=10$ 单位.这里选 100 这个数是因为答案非常明显.若把 100 换成 93 单位呢?方程变成 $x^2=93$,解就是 $x=\sqrt{93}$.埃及人和巴比伦人会逼近这个解,但都不知道求准确的解需要另一类数.我们必须等待希腊人来发现这一事实.

我们已走了多远?

我们已看到人类首先发现的数是自然数,其主要用途是通过计算对象集的基数来记录财产.当农耕业开始兴起、城市渐次形成时,我们的祖先面临一系列新的问题.他们必须计算日期以制订历法,必须丈量土地以利耕种,必须计量麦酒和大麦的体积,好歹还得把一切结果记录下来.文字发明了,数系在演进,小数诞生了,实用代数和几何开始登台.此时的人们有两类数可用:自然数和分数.他们还需要些什么玩意儿呢? 【76

第5章 中国与美洲的数

尽管现代数学和我们关于数的现代概念是西方与中东社会的产物,但中国文化与美洲土著人的文化也很重要.这两种文明,特别是美洲土著人的文明,没有受到其他民族的影响.这为我们提供了审视中国人和美洲土著人独立发展数的概念的机会.可以让我们认真思索我们关于数的现代观念是否深受其开山祖师,主要是巴比伦人、埃及人和希腊人的影响.换句话说,在独立发展的社会中生活的人们开创的是完全不同的数系呢,还是其相似之处大于差异之处呢?

古 代 中 国

中国的古代文明与美索不达米亚地区和埃及的文明是同时代的,或者比之稍晚.中国和印度、甚至和西方有过一点接触,但他们之间是如何交流的问题仍是个谜.对中国早期数学的研究证实了独立发展的观点.即使有过一些相互影响,中国数学的大部分历史,一直是在与外部文化隔离的情况下发展的,这一说法肯定是合理的.

一些中国学者把中国第一批统治者的年代推至公元前 7] 17 000年.现代(西方)的学术研究在揭示中国文化的丰富性与复杂性的同时,[1]也表明这一如此久远的年代是被夸大了的.[2]有关中国历史的更大的不确定因素是,学者们很难认定中国在公元前 1122 年的武王时代以前的各种事件发生的确切时间.且

期的混乱状态部分地是由于早期中国国内的冲突，它们有时会隔断社会发展的连续性.例如，公元前213年秦始皇下令焚书.我们只能猜测他的命令被成功地执行了，而那些书稿则永远消失了.

中国文明的较合理的开端应在公元前2852—2738年间的伏羲氏时代，据传他是中国的第一位帝王.他在中国统治的时间在上埃及与下埃及统一之后，与金字塔的建造和美索不达米亚的苏美尔王国处于同一时期.在伏羲氏统治时期，中国人进行了大量的天文观察.因此，他们的数学应早已开始发展.在公元前2704年登上帝位的黄帝的支持下，据说出现了一本天文学方面的教科书，并建立了一种以六十而不是以十为基底的体系，尽管后来中国的数学是以十进制体系为基础的.在整个第三个千年间，数学活动一直在延续着.

中国数学的高峰出现在公元后13世纪，据传在该世纪活跃着三十多个数学学派.中国人达到的数学水平总体上超过了巴比伦人和埃及人.

中国的数系

中国的数系与其他数系之间的区别，有一部分是由于中国的语言结构造成的.中国语言的音素由420个单音节词组成，其中每个词可用四个声调说出，总的语音数目接近1 700种.为了表达几千个概念，不少单音节词必须有多种意义.中文里没有时态、(名词的)性和冠词.另一方面，中文的书面语以四万五千【78】多个独特的象形字或者说方块字组成，每个方块字都足以表达一个完整的概念.3)因此，中国的口语用到的语音较少(但有许多方言)，而书面语包含成千上万的方块字.所以，古代的遍布全国的文化人，都能阅读基于象形的而非语音的文字的书面语.这是一种统一的力量，把中国人融合在一起，使得政府能够实行大范围的控制，在其他大多数社会还没发现过这种力量.

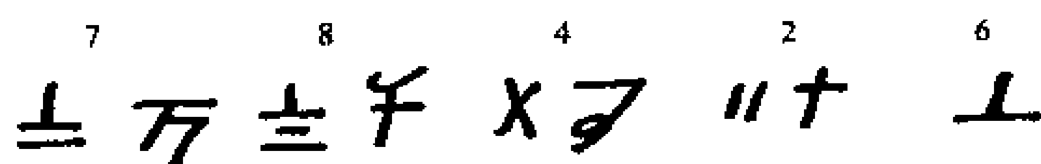
在中国发展起来的基本数系是十进制的，数 1 到数 9 分别用专门的词表示．表示 10 的词是“拾”，接着便开始新的循环．表示 1 的词是“壹”，表示 2 的词是“贰”．表示 11，12 等数的词，是由表示 10 的词与表示较小的数的词组合而成的：11 是“拾壹”，12 是“拾贰”．对于几十这样的数，如 20 到 90，就把表示一位数的数词和“拾”反过来摆放：20 简单地写成“贰拾”．此外还有代表 100，1 000 和 10 000 的词，它们分别是百、千和万．至于到达 1 000 000 这一等级的数则由表示较大的数的词组合而成．

例如，数 78 426 就是用表示一位数的单个数词与表示 10 和 10 以上的词组合而成的．表示数 7 的词“柒”与表示 10 000 的词“万”组合得到“柒万”．这一做法对其余的数字同样适用，最后我们可得：

7	8	4	2	6
柒万	捌千	肆百	贰拾	陆

这种口语用的数系与我们英语中的体系非常相似．在英语中我们说“78 千 4 百 26”．在我们的体系中，在加上诸如“百”和“千”这种更大等级的数位之前，对于“百”以内的数我们也要用组合的办法．中国的这种体系不是位值制的，因为不同的合成数的各个部分可以移来移去而不失去其基本量值．我们在英文中也注意到，那些词可以在不失去它所代表的数的意义的情况下移来移去，尽管这违背了读写规则．我们可以说 6(six)，4 百(four hundred)，78 千(seventy-eight thousand)．

中国人在把口语中的数词转变成书写的数字时，他们保留了他们的基本体系．对口语数词体系中的每个数都唯一地指定一个象形字，而且数的组合的方法也相同．古代中国发展出四类不同的书写体系(其中二种展示在图 16 中)：基本数字，商用数字，官方数字和算筹数字．使用图 16 的商用数字，我们可以把数 78 426 写成：



	基本数字	商用数字	算筹数字	相应的名称（数词）
0		〇	〇	零
1	一	〡	一	壹
2	二	〢	二	贰
3	三	〣	三	叁
4	四	〤	𝍬	肆
5	五	〥	𝍭	伍
6	六	〦	𝍮	陆
7	七	〧	𝍯	柒
8	八	〨	𝍰	捌
9	九	〩	𝍱	玖
10	十	十	一〇	拾

图 16 古代中国的三类数字以及与之相应的数词.

[80]

在中文里，数的书写格式是从上往下、而不是从左向右写的.当中国人把口语数词转换成书面的数码时，仍然缺少像我们的印度—阿拉伯数系那样的位值制.一个数中每一个数字用一对符号表示，一个符号指示数码而第二个符号指示其位值.因此，这种成对的中国数码符号的位置的改动，完全可能不改变原来的意义（只要你注意个位数字的变动）.如果你试图在印度－阿拉伯数系中做这种改动，那么数本身就变了.

中国人并没有因为缺少零而遭致麻烦，因为他们并不需要它.正像我们也不会因为说“四个百，零个十，和七”就产生

麻烦一样.中国人不论在口语还是书面的语言中都可以忽略零.直到公元 13 世纪,零的符号才在他们的书面语中出现.[4] 这比在欧洲数码和美洲马雅人数码中出现零的时间要晚.

史前人类所使用的第一批数词都不是抽象的,而是具体的,人们用它们修饰名词以描述客观物体.在英语中我们还有一对牛,一副手套这样的用法.这种原始的修饰语在中国语言里仍是有目共睹的,约有一百种不同的涉及数的修饰语.

中 国 数 学

古代中国保存下来的四部经典著作能帮助我们了解公元前1000 年前的中国数学.第一部著作是《书经》,成书于公元前第三个千年的末期,相传是尧帝(约公元前 2357 年至 2258 年)所著①.据这部作品中记载,同为天文学家的名叫和与羲的两兄弟,因未能预告日蚀而遭到皇帝的重罚.这部中国古代著作涉及预测日蚀的深奥的天文计算,它可以跟比它晚大约 1 500 年的早期希腊的同类工作相媲美.第二部著作是近期在西方很流行的《易经》,它可能是文王在公元前 12 世纪期间所著②.《易经》并不是一部真正的数学书,而是中国人在长达数千年的时间里用来决定重要行动的占卜书.它还提到一种魔方,将九个数排成方阵,使三个水平行中的每行、三个垂直列中的每列以及两对角

① 原文有误.《书经》即中国古代儒家经典《尚书》,相传由孔子(不是尧帝)编选而成,而其中的《尧典》是以后的儒家补充进去的.

另:文中所列有关尧在世的具体年代,实际并无确切记载.一般认为,尧所生活的五帝时代约在公元前 26 世纪初到前 22 世纪末或 21 世纪初.——译注

② 《易经》亦称《周易》,包括《经》和《传》两部分.《经》的内容主要是六十四卦和三百八十四爻,卦和爻各有说明,称为卦辞和爻辞,作占卜之用.旧传伏羲画卦,文王作辞,说法不一.——译注

线中每一对角线上的数相加后得到同一数值[1].《易经》的占卜方法使用了六十四卦,各卦由两种图形(—和－－)按不同次序排列成六行.这证明中国人对排列组合概念很感兴趣.这些概念很可能要比《易经》古老得多,也许属于公元前1200年以前很多世纪内中国文化的内容.

古代中国保存下来的数学抄本与巴比伦和埃及的著作类似:它们向读者提出一系列问题.现存的第一部真正的数学书是《周髀算经》,成书于约公元前1100年[2],它涉及与历法有关的计算和关于分数的资料.该书还论及把一条线分为等于三、四和五个单位长的线段的事实,这极可能跟边长分别为三、四、五的直角三角形有关.因此,中国人可能在当时就知道毕达哥拉斯定理.

四部经典著作中的最后一部,也是最受称道的一部,题为《九章算术》,据称它是公元前200年左右张苍所著.它基于许多早期著作,后者有的可追溯到公元前1000年之前[3].该书共分九章,列有246个问题.这些问题的主题涉及税收、测量、比率以及三角形、圆和梯形面积的计算.它也有关于联立线性方程组、直角三角形、平方根与立方根、试位法规则的应用等这些我们在埃及数学中遇到过的问题.中国人不但能解含有未知数的平方

---

① 《易经》中只是说."天数五、地数五,五位相得而各有合".东汉末郑玄对此文及相关文献作注解,得出如下的九宫数.即三行的纵横图.此时,每行、每列及各对角线上三数之和皆等于15.——译注

② 《周髀算经》亦称《周髀》,据考证是汉朝人撰的涉及数学与天文学的著作.它的成书年代不晚于公元前1世纪.其中第一章叙述西周开国时期(约公元前1000年)周公与商高的问答,讨论勾股测量方法,其中涉及相当繁的数字计算和勾股定理的应用.——译注

③ 一般认为,《九章算术》是汉朝数学家在秦以前流传下来的数学知识的基础上整理、补充、修订而成,具体作者不详.成书年代约在公元前后.——译注

和立方项的方程，而且还能解含有未知数的十次幂的简单方程.

中国人已解决了他们称之为“大衍”问题的不定方程. 对于确定性的方程，存在一个或数量有限的一组满足方程的答数. 而对于不定方程，却存在无穷多的答数. 例如，我们用现代记号写出方程 $3X+4Y=17$. 当我们用一个值代替 Y 就能解出一个 X 的值，反之用一个值代替 X 也能解出一个 Y 的值. 这个特征使[82]该方程成为“不定的”，就是说使该方程成立的解并不能全部明确地确定下来. 这类方程在现实世界中有很多应用.

也许，《九章算术》在数的理论方面的最大贡献在于它叙述了负数. 在这里我们找到了证据，证明中国人在很早的时候，可能是公元前 1000 年前，就已经碰上了一种全新的数，它既不包含在自然数里，也不包含在正分数之中. 不过，他们还没有全盘接受负数，因为尽管他们在计算中使用了负数，但他们不允许负数成为方程的解.

总体来说，中国的数学要比巴比伦和埃及的数学先进，但不如希腊的精深. 他们的许多努力指向解决实际问题，当然也在有限的程度上作一些证明. 他们很看重那些研究数学的人. 事实上，数学家是古代中国宫廷中必不可少的人物，因为每个新登基的中国皇帝都会下令重新修订历法. 这不仅是为了给宫廷确定举行重大仪式的日子，也要给普通百姓一部涉及河流泛滥、耕作时令及何时发生日蚀的日历. 因此，皇帝是通过他的天文官与数学家的计算，向人们证明天施予他恩惠，神灵授予他统治的权力.

中国数学家曾对计算 π（即圆的周长与直径的比）的更精确的近似值十分感兴趣. 根据对 π 的计算精度可粗略估计一个社会数学的发达程度. 那些还没有领悟计算与数学的早期社会，通常用近似值 3 已足够了. 例如，古希伯来人在建造所罗门神庙时就用 3 作为 π 的值.[5] 巴比伦人的近似值稍精确一点. 有时他们

用3,有时则用误差为0.52%的值3.125.埃及人估算的π值是$\frac{256}{81}$,约等于3.160 5,有0.60%的误差.

在中国，不仅宫廷中在使用数学，普通的商人也有必要掌握基本的算术运算．由于中国的数系不是位值制的，中国人按个、十、百、千等这种量级写出数值，利用这种量级做计算是太繁琐了，所以书面语中的数码不能直接用来进行计算①．于是，中国人利用心算做计算，然后把计算结果记录于算板上．算板是算盘的前身，是在木制平板的表面划上一些线条形成由许多方格构成的矩形．一些表示单位的长约四英寸的小棍被置于不同的方格内，而方格本身代表较大的数．使用的小棍分两种，红色的代表正数，黑色的代表负数．据称中国的数学家们发展了一套利用算板的高超的技能，能够迅速地完成非常复杂的运算②． [83]

中国人对占星术、算命和预测未来也很感兴趣．通常，复杂的计算需要按正确的程序进行．因此，普通百姓对数学神秘

---

① 本书作者显然对中国古代的数系不十分了解.中国古代使用的算筹计数法,除数码形式不同外,跟现代的十进位值制完全一样.算筹是几寸长的小棍(质地可为竹、木、玉、金属等),摆出的数码(分纵、横两种形式)与阿拉伯数码对应如下：

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9	
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	纵式
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱	横式

计数时个位用纵式,其余各位纵横相间使用,如𝍪𝍢𝍩𝍦表示2317.零用空位表示,4059写成𝍬 𝍭𝍨.算筹计数起源很早,后来写在纸上就成为算筹计数法.——译注

② 至今尚未发现在中国古代有如作者所描述的那种算板、另外，作者所说的“利用算板的高超技能”，很可能就是我们所说的用算筹计数法进行的各种计算．——译注

主义有实实在在的兴趣.

中国的数学发展到了相当高的水平，不幸的是它几乎没有对西方数学的发展产生过影响. 当中国最终打开国门允许现代技术进入时，她的数学家不得不急起直追他们的西方同行.

美洲(大陆)的数学

如果说中国和印度、甚至和中东地区之间可能有过些许的相互的影响，那么现在没有证据能说明新大陆的数学发展与旧大陆[1]的任何部分有联系. 北美与南美的许多部落过着狩猎－采集生活；而其他一些部落已发展到了原始农耕时代. 这些部落没有书面语言，因此也没有书面的数学. 这些部落有各类口头使用的数系，从纯2元计数法和新2元计数法，直到5，10和20元计数体系.

北美的狩猎－采集者和原始农耕者通常用手指来数(shǔ)，而用小棍或卵石来记录结果. 一些勇士还通过计数刻痕和陈列羽毛来记录他们在战场上取得胜利的次数. 有一族美洲印第安人(Blackfoot)用打结来记帐，非常像印加人的结绳文字. 算术通常只限于加到20，也做一些简单的减法，但没有证据说明有乘法和除法.[6] 当时，从事这些较高级的算术运算可能是巫师或聪明人的职责. 有证据证明，在15世纪之前，那里出现过若干较大的独立农耕社会，但在欧洲人到来之前它们已消亡了，其中引人注目的有密西西比河谷处的克霍基亚村(Cahokia). 这些美洲土著人达到了多高的数学水平，我们还无法说清.

[84]

大部分北美土著居民没有历法. 他们依据过去发生的事或预期将发生的事为基准来确认天数、甚或"月"数或年数，但他们还没有系统的方法去跟踪自然界中周期性发生的事件，从而无

[1] 指亚洲，非洲和欧洲. ——译注

法对发生过的事作出可靠的记录，也没能力预测未来的事件．天数没有累积成月或星期，也不用小时来定义天．现在尚存一种被密西西比的克霍基亚人和北美西南部土著人使用的棒圈(Pole ring)，用于对太阳、也许还有月亮和较大的星群进行天文测量．这表明某些北美土著人曾努力为预测季节而试图制订历法．

为什么北方的美洲土著人在数学方面没什么进展，而在中美和南美却至少有两个群体在数学方面颇有成就呢？最可能的原因是前者没有这方面的需要．他们的狩猎－采集和原始农耕业的社会方式延续了几千年，其间没有出现促使他们发展更先进的算术技能的环境压力．当肥沃新月地区的农耕业村庄不断扩展，逐渐发展为城市，并促成了商人的形成和商品生产时，美洲土著人却仍在较小的社会部落范围内实现了他们的需求．不过，有两个新大陆的社会确实有了较大的进化，那就是马雅人和印加人的社会．

马　雅　人

古代马雅人的居住地区包括现在的伯利兹(Belize)、墨西哥的尤卡坦半岛、危地马拉、以及洪都拉斯和萨尔瓦多的西部．早【85】在公元前9000年，狩猎－采集者们就居住在墨西哥的尤卡坦半岛和伯利兹的低地地区．到约公元前2000年，伯利兹出现了农耕村落．[7]随着人口的增长，大约在公元前400年开始出现大型的宗教布道坛．新神权国家由信奉以太阳神为主的泛神论宗教的祭司们统治着．这就是当时的马雅人．

马雅人挖了占地很广的水渠来排干湿地的水，同时他们堆积土壤以抬高周围的耕地．这使他们可以不间断地耕耘，大大增加了粮食产量．大量的食物又引起了人口的增长．据估计，四大宗教中心之一的蒂卡尔(Tikal)，在公元700年左右的鼎盛时期，人口在两万到八万之间，而另一座马雅城市埃尔米拉多(El Mirador)可能养活了八万之众．[8]他们的社会延续到公元800年，

那时人们突然停止了建造大型建筑物，城市人口开始减少．到公元 900 年，马雅社会已走向衰亡，最终在公元 1000 年时四分五裂，其宗教中心被来自北方的托尔铁克人（Toltec）侵占．

马雅人发展了一种复杂的书写用的很难解的语言，它们出现在书籍中和纪念性建筑物上．书本中用的文字比建筑物上的更为简单，也更抽象．由于征服者自愧不如，便把除了三部书（现存于欧洲的几座城市中）以外的全部书籍毁掉了．[9] 1541 年的一天，在尤卡坦半岛上名为马尼（Mani）的城里，方济各会的修道士迪亚戈·德·兰达（Diago de Landa）烧了马雅人的书，永远毁掉了伟大民族创造的珍贵的记录．据记载，德·兰达后来认识到自己对马雅人犯下的罪行，遂用他的余生从那个社会尚存的遗物中收集马雅文明的资料．这把焚书之火不免使我们想起了其他一些愚蠢的破坏行为！公元前 213 年，中国的帝王秦始皇下令焚毁了很多中国书籍；公元前 48 年，尤利乌斯·恺撒（Julius Caesar）带着他的军队逃离亚历山大时，对埃及的亚历山大图书馆进行了严重的破坏，该图书馆收藏着罗马、印度、希腊和埃及的大量书籍．公元 391 年，基督教的狂热信徒、希奥菲勒斯 [86] （Theophilus）大主教率众烧毁了亚历山大图书馆的剩余部分，因为教皇大特奥多修斯授权他毁掉所有异教徒的神殿．就这么几个人竟造成这么多世界古代遗产的毁灭，简直令人不可思议．

我们所能知道的大多数马雅文字出自于 120 处遗址，包括大约八百个刻在古建筑或石碑上的符号，其中只有五百个已被破译．马雅人并不是在中美地区首创文字的居民，证据是更早期的居民——其文明从公元前 1200 年一直持续到公元 1 年的奥尔麦克人，已经使用了一种象形文字．事实上，墨西哥和中美洲的所有较发达的社会都使用象形文字和五十二年双日历历法，不过，正是马雅人将二者发展到相当先进的程度．

在西班牙人入侵之前，马雅人没有用于直接讨论数学问题的文字．所以我们对马雅数学的了解大多来自于刻在石碑上的

数，这些石碑是用来记录重大事件的发生时间的.我们没有任何他们有关数学的具体思想的记载，据我们所知，他们的数学主要用于计算马雅历法.

最古老的马雅人的数，出现在一块约建于公元400年的石碑上.马雅人的数系是以二十为基底的二十进位制，而不是像我们所用的十进位制.他们的数系包括位值制和零.他们的数是竖着写的，值较小的数码写在下面，较大的数码写在上面.在马雅语言中，从一到十都有专门的数词来表示.从十一到十九的那些数词非常像我们英语口语中的用法——用个位词与表示十的词相结合.值得注意的是，他们在写数的时候只需要用三个符号，即代表"一"的小圆点，代表"五"的短横杠和代表"零"的椭圆.一到十九之间的数写出来就是许多圆点和横杠的组合.印度－阿拉伯位值制体系的前五个位值是：

$$10\,000+1\,000+100+10+1.$$

而马雅数系的前五个位值是：

$$144\,000+72\,000+360+20+1.$$

[87]

这些值是由下列乘法得到的：

$$20\cdot 20\cdot 20\cdot 18+20\cdot 20\cdot 18+20\cdot 18+20+1.$$

为什么用十八而不都用二十呢？符合逻辑的体系应该每一步都用二十乘.不过，他们的数系是用来记录日期的.为了制订历法，他们将一年划分成十八个月，每月二十天.这使得一年只有360天，所以他们又另外加上五天以补足缺额；这五天被称作uayeb——禁忌日.这里的十八个月乘二十天说明了为什么他们的位值体系中有十八.在他们的象形文字中，数值不仅有其位置指示，而且还伴随着一些怪诞的绘画(图17).

例如马雅人写46783这个数时写成图18的式样.水平方向表示同一位值，则我们可得：

$$6\cdot 7\,200+9\cdot 360+17\cdot 20+3=46\,783,$$

$$\text{或 } 43\,200+3\,240+340+3=46\,783.$$



图 17　马雅石碑. 这是石碑的一面，从上部边缘可以很清楚地看到呈【88】圆点与横杠状的马雅数字.（布朗兄弟出版社，斯特灵市，宾夕法尼亚州）

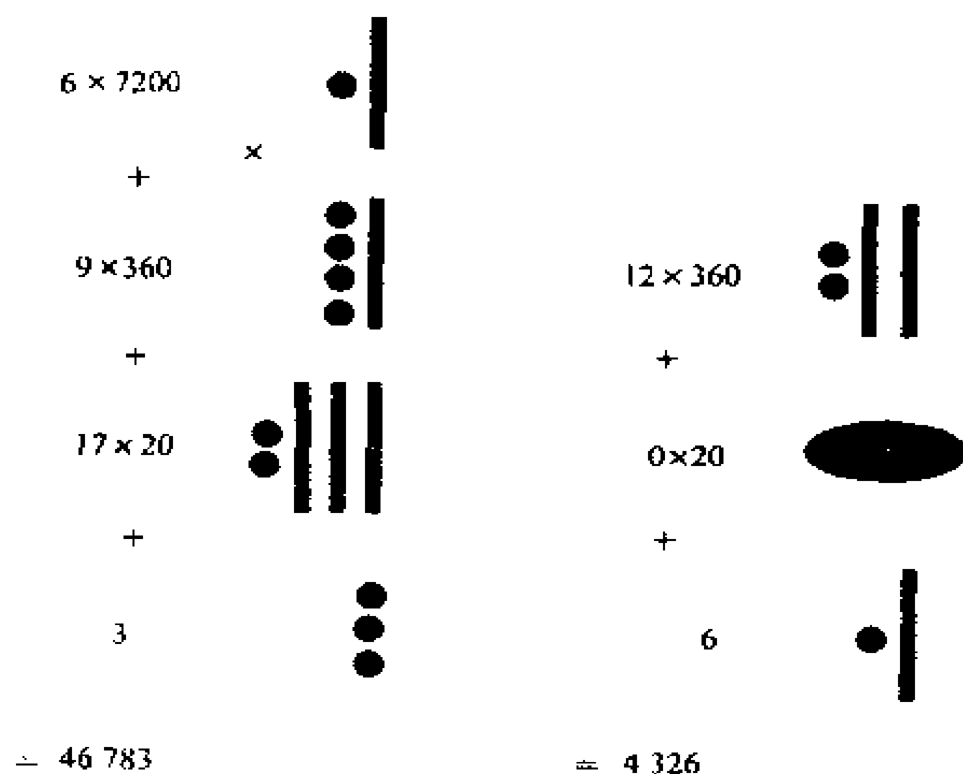


图 18　用马雅数字表示的46 783（左）和 4 326（右）.

图 18 中的第二个数(4 326)显示马雅人在该数的第二位使用了零.我们可由图 18 得到:

$$12\cdot(18\cdot20)+0\cdot20+6=4\ 326.$$

这种以二十为基底、在第三位上用了十八的数系过于复杂,似乎完全没有必要这么做.实际上,设计这种数系是为制订历法的马雅祭司们、而不是为普通百姓用的.很可能一般人只用口语中的二十个数词,而那些识字的马雅人,也许他们就需要用这些【89】由点和杠状的符号组成的基本的数字表示法.这种正式的数系是为神权统治者预备的.

马雅人的宗教促成了他们的复杂的数系,这种宗教崇拜若干神灵,包括太阳神、月神,也许还有他们已观察到的那颗晨星和昏星——维纳斯女神(金星).追踪天国之神需要一种好的历法;为了做到这一点,他们实际上创立了好几部历法.一部称作 haab 的非宗教历法是用来指示季节的,它包括十八个月,每月二十天.这部历法以一年中增加五天来加以调整,并通过对金星的观察进行额外的调整(为了说明每年应多四分之一天).更精确的年是由科潘地区(Copan)的一位马雅祭司计算出来的,他明确说出一年有 365.242 0 天,这比我们的格列高里历的 365.242 5天稍接近于更精确的值 365.242 2 天.

另一部历法以二十个定了名的日子为基础,有十三次循环,共含 260 天.这就是神圣的特佐尔金(Tzolkin)历.两部历法组合使用,使得任一特定的日子需要用特佐尔金月中那天的号数加上 haab 月中那天的号数.为使特佐尔金历与 haab 历完成一个共同的循环周期,需要五十二年,这一周期被称做一个"历的轮回".除了 haab 历,特佐尔金历和历的轮回之外,他们还采用"长期计日法",这种计日体系以天地万物创生的日期为起点.这种长期计日法以其数系为基础,计算时要考虑 baktun(144 000 天)、katun(7 200 天)、tun(360 天)、uinal(20 天)以及最基本的 kin(1 天)等各种周期.马雅人相信他们生活在长期计日法的第

五次循环中，根据我们的历法它开始于公元前 3133 年．要是认为马雅人在如此遥远的年代就开始使用历法，那可能是错误的．他们也许根据有关他们的神的传说定出了公元前 3133 年这一年代．我们的日期公元 501 年 1 月 5 日可能离万物创生时刻已过了总共 3 133 + 501 = 3 634 年．这等于 1 326 410 天（忽略闰年多出的天数）．我们在一月增加五天加到这个数字上．根据马雅人的长期计数法，这一日期应表示为九个 baktun、四个 katun、四个 tun、八个 uinal 以及十五个 kin．

除了这种算到今天已历时五千年或十三个 baktun 的长期 90] 计数法外，马雅人还很赏识一个更长的时间周期，他们称为 alautun，由 baktun 相乘而得．一个这样的周期长达六千三百万年．

总之，马雅人发展了一种很特别的数系．我们的印度－阿拉伯数系可能早在公元 500 年就出现了．但更可能在公元 800 年左右起源于印度．[10]因此马雅人的包括零在内的位值制体系比我们现代的体系早了四个世纪，而且比印度－阿拉伯数系传到欧洲早整整一千年．事实上，马雅人用了不过几百年的时间创造出了零，而零在旧大陆的出现花费了几千年的时间．[11]他们的历法比同时代欧洲的历法要成熟，而他们的科学与天文学可能也胜过了同一时期的欧洲人．他们知道金星绕太阳一周需要 584 天①，他们测得金星的运动，在五百年内的误差不超过两小时．[12]现存的一份马雅手稿（德雷斯顿抄本）包含了几张精确度颇高的有关金星和月球的天文表．至于马雅人的数学财富，由于兰达焚书这一悲剧而永远丢失了，对此我们只能叹息！

---

① 金星的公转周期是 225 天，自转周期是 243 天．584 天应指金星的合会周期（太阳、金星和地球三者大致运动至同一直线上称为“合”，从合到合的日数称为合会周期）．——译注

马雅人的文字和历法体系被后来的托尔铁克人、米斯特克人和阿兹特克人所采用.不过到阿兹特克人的时代,52 年这一较长历法周期已被放弃,而且他们的文字的品质下降了.阿兹特克人不再用短横杠表示五,而且已经抛弃了零.

印　加　人

大约在公元 1410 年,生活在秘鲁库斯科谷地的印加人开始控制其邻近地区.在 1532 年弗朗西斯科·皮萨罗(Francisco Pizarro)到来之前,他们一直在不断扩大自己的疆界.西班牙人看到的这个帝国,从厄瓜多尔西北部延伸到智利中部,包括秘鲁、玻利维亚和阿根廷的一部分,从北到南跨越了四千公里.据估计,印加的人口在六百万到一千二百万之间,[13)]说明它是新大【91】陆最大的帝国.为了预防因战争和欠收可能带来的食物匮乏,印加人建造了遍及全国的大仓库,里面装满被称做 chuño 的经冷冻干燥的土豆.他们的道路系统总长度约达三万公里,被称为"太阳大道",把位于库斯科的首都与全国广大地区连接起来.为了管理这个巨大的帝国,印加人建立了称为 chasquis 的分程传递的接力队,把信息从各省传到首都库斯科.为了帮助接力者,沿路建立了驿站网,几乎每隔 4.5 英里便设置一处驿站.

印加人没有书面语言,而许多信息与官方档案又必须有据可查.为了记住这些东西,印加人创造了一种在绳上打结的复杂系统,称为"基普"(quipus),用来记录数和被计数的事物.其他许多社会在其历史发展进程中也使用过这种工具来记录数,其中包括古希腊,中国,夏威夷和 19 世纪的非洲.印加人设计了相当奥妙而复杂的结绳记事法(见第 4 章图 10).尽管我们有很多结绳记事的实物并能轻而易举地解释所记录的数是什么,但由于他们没有书面语言,如何使用这一方法的细节我们无从知晓.

"基普"被称为 Camayoc(或 Quipucamayoc)的官员用作计数工具,他们在政府各部门中任职,负责记录统治者感兴趣的几乎

任何事物.Camayoc在特殊的学校中受训,这类学校仅仅向印加社会中的精英开放.学生们不仅要学会如何使用基普,而且还要熟悉已有的"基普"所反映的口头历史.基普是由一组线绳做成的,每条绳长约40厘米.有些"基普"包含一百多条不同的线绳,每一条记录一个数.通常每条绳都涂上颜色以表示所计数的事项是什么.有时把一条绳与其他绳连结起来表示总的计数值.

印加人使用的数系以十为基底.每个数字用绳结的组合表 92】示,与相邻的数字均匀排开.零用绳上的一个空位表示.他们使用的结分三类:单结,双结和具有从二到九个圈的滑结.结从上往下在绳上顺序排列.因此,数475表示成在绳的顶部有四个结,跟着是七个一组的结,然后是五个单结或具有五个圈的滑结.

印加人不像马雅人和阿兹特克人那样在城市中生活,而是居住在一些小村落里,那里的人口很少有超过一千的.首都和其他各省的中心是一些官僚居住的庙宇.他们将十进制数系和5元计数法合起来使用,把全国人口按家庭划分成十个、五十个、一百个、一千个、五千个等组群.农田则被分成三个部分,一个部分上的产品归庙宇,第二部分农田上的收获归各省中心的首领(Sapa Inca),只有最后一部分农田的产品归农夫自己使用.每个公民都需要向政府贡献他(或她)的一份劳动(妇女和孩子也在其列).所以这些都必须记录下来,由Camayoc记在他们的"基普"上成为信息,然后传送到库斯科的权力中心——这真是一项规模浩大的工作.

所以说,印加人像马雅人一样使用有零的位值制数系.只是马雅人用其数系制订了历法,以追随他们的神灵,而印加人用数系控制和管理众多人口的日常生活."基普"不像算盘那样用于实际的计算.印加人可能用手指、小卵石或其他辅助物进行计算,然后把结果记录在"基普"上.将印加人和苏美尔人的发明作一平行的对比也是很有意思的.苏美尔人首先发明了帮助管理

商务、庄稼地和征税的符号体系，它们后来发展成了文字；而印加人的“基普”体系也是帮助管理人和财产的.“基普”体系为什么没有演化成真正的文字呢？我们必定记得西亚的符号体系花了近五千五百年的时间(公元前 8500 年至前 3100 年)才完成这一演化.而印加帝国延续了还不到二百年！考虑到这是个短命的帝国，那么他们所取得的成果从任何标准来看都确实让人震惊.

[93]

独立的发现

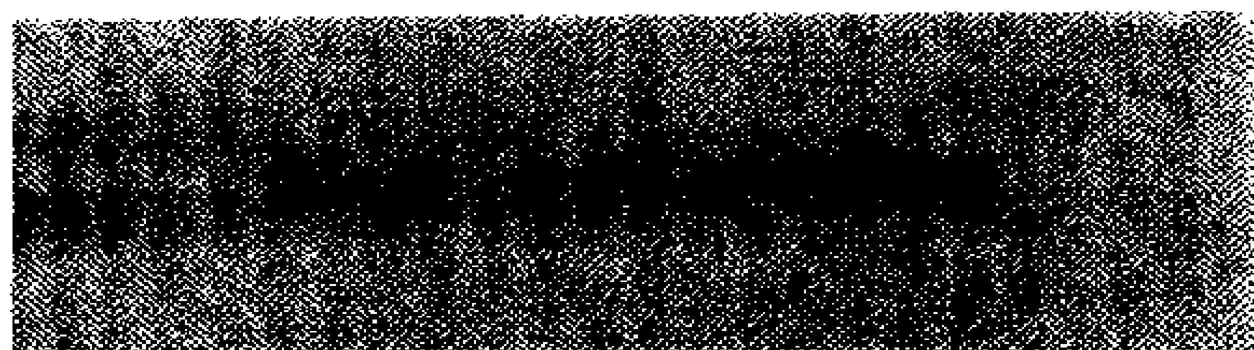
中国与美洲新大陆数系之间的类似之处，以及苏美尔与埃及数系的雷同之点都是显著的.所有这些数系都是把 5、10 和 20 的计数的某种组合纳入他们的数系框架.即使是苏美尔人的以六十为基底的数系也包含以十为基底的细部.大多数系统都是位值制的.肥沃新月地区和中国接受零的过程很缓慢，但最终大家都采用了零.可以说，在人类数系中一再出现的课题包括一些最基本的内容：手指计数(五 = 一只手，十 = 两只手，二十 = 所有的手指和脚趾)，位值制体系和零.

现在我们可以来回答在本章开头提出的问题：各自独立发展的数系基本上是类似的吗？答案是肯定的.人类都是经过大体相同的途径来解决那些需要使用数字和计算的问题的.

中国人和美洲土著人的数学展示了既用于口语又能书写的成熟的数系，但并没有演化出像肥沃新月地区那种与众不同的证物.事实上，就算苏美尔人和埃及人从未存在过，我们肯定仍会有数系和文字.我们看到，随着农夫们的村落发展为城镇，制造业和贸易便兴旺起来，这期间农夫们遇到很多问题；正是为了解答这些问题，才逐渐形成了数系.无论在哪里，只要聚集了大批的农夫，出现由权力中心来管理的情形，肯定就会出现一些需要用更先进的数系来解决的新问题.人们面临着分配土地，计算和征收赋税，建立军队和筹饷，运载货物，签定和履行合同等必



须解决的问题.这些问题造就了部落的会计和圣职会计,他们将94】原始时代的农夫们朴素的计数体系变成了管理帝国的工具.



早期希腊文明

至此，我们已经回顾了从史前时期至约公元前 1000 年旧大陆上数的演进过程．我们已经看到数的概念的扩张：从自然数扩展到埃及人的单位分数（形如$\frac{1}{n}$），巴比伦人的六十进位制的分数（形如$\frac{n}{60}$），以及中国人的负数．现在来看看古希腊人的贡献．人们一直认为，希腊人确立了科学、哲学和数学的地位，并为这些学科建立了标准，这些标准一直沿用了两千年．然而，另有一些人则说我们给了希腊人太多的赞誉而忽视了其他社会的贡献．

实际上，这两种观点都是正确的．希腊人将早期文明中的实用计算和测量术重新确立为我们今天所谓的科学和数学．希腊人在大约公元前 600 年至公元 300 年间取得的成就，使后来一千五百年间的智力成果显得黯然失色．但是我们也不应陷入盲目，相信他们完全没有得益于更古老的社会而只是孤军奋战．几乎能肯定地说，他们借鉴了埃及和巴比伦的东西．当然，他们在很多方面取得的成果是全新的，具有典型的希腊特点．

希腊文明始于约公元前 2000 年，当时一批说希腊语、尚不识字的印欧语系人，离开北巴尔干半岛迁移至希腊与东地中海 【95】沿岸．[1]在那里他们开始吸收克里特岛上的古老文化．在其后的

一千四百年间，他们散布到西亚的米诺(Minor)(今土耳其)、爱琴海诸岛和希腊全境.他们定居的这片领地促成他们形成了各种各样的管理模式.苏美尔人及其后的巴比伦人占据着大片平原：一种易于统治者迅速调动军队、难以构筑防御工事的地形.这使强大的苏美尔和巴比伦的君主们有可能扩展他们的统治领地.埃及人占据的是狭长的河谷，这种地域也适于集中管理.

希腊人就不然了.他们生活在一个个城邦国家中，这些城邦通常几面环山又毗邻大海，都是建筑防御工事的理想场所.因此，任何一位希腊国王想征服他的邻邦都很困难.当巴比伦和埃及都已由单一的统治者管理时，希腊还只是个多城邦的联盟.这意味着希腊人并不受制于单一的世界观或宇宙观，那只是几千年来祭司们意欲强加于人的观念.各个城邦可以制订自己的规则.随着这些有闯劲、攻击性和好奇心的希腊人居住的东地中海地区的缓慢演进，我们这个世界实现智力爆发的时机成熟了.

被共同的生活背景和语言联结在一起的希腊人，于公元前776年在希腊南部波罗奔尼撒半岛的奥林匹亚开始举行泛希腊运动会.从公元前775年至前750年，他们又开始和腓尼基人通商，后者占据着位于地中海最东端的沿海国家，以提尔和西顿为中心城市(今属黎巴嫩).希腊人借用了只由辅音与附加元音组成的腓尼基人的字母系统.具备了这种新的书写能力，希腊人开始用史诗记录他们的传统.经过150年的迁移大潮，到公元前600年，希腊人占领了六百到七百个相对独立的城市，从黑海西岸延伸到意大利南部、利比亚和西班牙沿海地区.在这期间，他们开始在贸易中使用货币.

此时，希腊人进入他们历史上的古典时期，这一时期从公元前600年延续至公元前300年.第二个时期称作希腊化或亚历山大时期，从公元前300年延续到公元600年.不过，我们真正关心的是古典时期.因为在这期间希腊人确立了他们的数的概念.

在公元前 8 世纪希腊人刚开始使用那套字母时，他们缺少有效的中介手段来记录他们的精心之作．羊皮纸还没有发明，而泥板与腊板太占空间又不易搬动，也很难存放．幸运的是，纸草纸在约公元前 650 年进入了希腊人的世界．这时他们有了可以记载自己最深刻的思想的介质．他们充分利用了这种纸的优点．现存最早的具有科学性质的著作，出自公元前 4 世纪的柏拉图时代．第一部真正意义上的数学著作是欧几里得写于约公元前 3 世纪的《几何原本》．事实上，有重要意义的希腊数学手稿没有一部保存到今天．我们有的只是经过反反复复模仿，复写或修订的版本．这些复制品中最古老的一份是出自公元 200 年至 1200 年间的拜占庭(东罗马帝国)时代的抄本．

希 腊 数 系

希腊人使用过两种数系，第一种叫做雅典数系，它从最早期的文字诞生时代开始使用，到公元前 100 年至公元 50 年之间逐步停止使用．第二种体系在公元前 100 年之后占据了优势地位，称为爱奥尼亚或亚历山大数系．

雅典数系以十为基底，使用六个基本符号：

1 = Ι，　5 = Γ，　10 = △，　100 = Η，　1 000 = Χ，　1 000 = Μ.

“一”只用简单的一竖表示，其余五个符号都是希腊字母．其他的数都由这六个符号组合而成，这非常像较早的埃及数系和较晚的罗马数系．希腊人不像巴比伦人和现代社会那样使用位值制．表示五的符号 Γ 可以和其他作为乘数的符号组合使用．例如我们可以用 ℙ 来表示 5·100 或 500．为了得到 5 000 我们只须把 Γ 与 Χ 组合成 ℙ．下面给出雅典数系中其他几个数的例子：

[97]

47 = △△△△ΓΙΙ，

374 = ΗΗΗℙ △△ΙΙΙΙ，

23 621 = ΜΜΧΧΧℙ Η△△Ι．

数的符号通常按递减的次序写，但并不总是如此.你立即可以看到，在这种非位值制体系中，次序并非那么重要，希腊人没有使用零.一般来说，雅典数系也不用于表示分数.

第二种数系或爱奥尼亚数系，需要指定字母表中的字母来表示数值，如表 4 所示.表示各个“千”(1 000,2 000,…,9 000)的希腊字母跟表示单位数(1,2,…,9)的字母一样，只是加上了重音符号.注意，表 4 含有二十七个不同的符号，但古希腊字母表中只有二十四个字母.为了达到二十七个，必须加上三个额外的符号；即Ϝ(读作 digamma)，代表六；ϙ(读作 koppa)，代表九十；ϡ(读作 sampi)代表九百.上述字母都用大写，古典希腊时期是不用小写字母的.利用上述符号来表示 1 到 9 999 中的每一个数.需要使用四个或四个以下的符号.这种表示法比老的雅典数系有了实质性的进步.为了表示更大的数，还需使用几种不同的方法，包括借用雅典数系中表示一万的符号 M(读作 myriad)；那时用 M 和表 4 中的字母组合成更大的数.

表 4　希腊的爱奥尼亚数系

个位	十位	百位	千位
1=A	10=I	100=P	1000=,A
2=B	20=K	200=Σ	2000=,B
3=Γ	30=Λ	300=T	3000=,Γ
4=Δ	40=M	400=Υ	4000=,Δ
5=E	50=N	500=Φ	5000=,E
6=Ϝ	60=Ξ	600=X	6000=,Ϝ
7=Z	70=O	700=Ψ	7000=,Z
8=H	80=Π	800=Ω	8000=,H
9=Θ	90=ϙ	900=ϡ	9000=,Θ

08]

爱奥尼亚数系比起老的雅典数系，能用更少的字母表示较大的数，在货币上使用很受欢迎.不过，通常需要分辨清楚哪是希腊数字和哪是希腊词汇，因为二者都是由字母构成的，为此，可在数字上方放置一短横，有时用由点组成的短行把字母括

起来.

爱奥尼亚数系中使用的分数或是像埃及人用的单分数,或是真分数.真分数用以下几种方式表达:一种方式是在表示分子的普通的数字后面紧跟一个表示分母的带重音标记的数字.例如ΓH′就是八分之三.第二种方式是在分子后把表示分母的带重音的字母写两遍.因此,八分之三就写成ΓH′H′.第三种方式是在一行的正常位置写分子,而在它上方写分母,但形状要小一点.

雅典数系与爱奥尼亚数系都很容易读,但二者都不适于用来做计算.由于要用如此多的不同的符号,而确认数或分数的规则又有变化,所以,希腊数码比起我们的印度-阿拉伯数系来就显得有点混乱.为了看清这一点,我们只需要考虑简单的例子.在我们的数系中用三乘九十时,我们把它分解成两个步骤.第一步是用三去乘九十中的零,还得零.我们只要把零记下来.第二步用三乘九得二十七.现在把二十七写在那个零的左侧就得到270.用爱奥尼亚数系来解决同样简单的问题,会出现什么情况呢?我们不能用零去乘任何数,因为在爱奥尼亚数系中没有零.我们只好直接用九十乘三,或者说用ϙ乘Γ等于ΣO.如果我们尝试把它分解成用Θ(9)乘Γ(3)得出KZ(27),那么我们仍无法从KZ(27)得出ΣO(270).

在印度-阿拉伯数系中,我们能把运算分解成可以重复的简单步骤.之所以能这么做是因为我们使用了位值制.在爱奥尼亚(包括更早的雅典)数系中,我们必须记住一张相当大的乘法表.而我们数系的乘法表仅有九乘九项,包括八十一个元素.实际上,它确实很容易,因为"一"乘第二个数总等于第二个数.所以在实践中我们只须熟记八乘八项的表,即六十四个元素.由于爱奥尼亚数系使用许多不同的符号,加上它又是非位值制的,所【99】以需要一张较大的乘法表.有证据表明,希腊人实际上是以口语中所用词的声音而不是以写出的符号来熟记计算表的.因此,记

住“六乘七等于四十二”比记住对应的符号来得容易.[2]希腊人跟早于他们的埃及人和巴比伦人一样,都是依靠日常使用的各种计算表来做计算的.

几乎可以肯定希腊人是利用算板来实际操作计算的,不过并没有直接的证据来说明他们使用的方法.目前唯一保存下来的古希腊算板是在萨拉米斯岛发掘出来的一块白色大理石板;[3]相反,我们发现了大量提及算板的文字资料.希腊人把算板称作 abákion,使用诸如木材、大理石或黏土制成.板上画有直线以区分出区域,他们用被称为 psephoi 的算珠在板上移动来完成算术运算.日常计算的细节已全部失传.

哲学、科学和数学的诞生

在希腊人之前,哲学、科学和数学并没有明确的研究范围.公元前 600 年前的古代思想家都是祭司、统治者、书记员或商人.那时没有数学家和科学家,是希腊人为我们定义了这些词语,从而促成了学术界的形成,并一直延续至今.

小亚细亚的西海岸,耸立着一座叫做米利都的城,它是一处富有的商业中心.它的商船可以很容易地到达埃及的尼罗河,而内陆的商路把该城和巴比伦相通.同时,米利都人喜欢跟所有的希腊城邦和腓尼基人通商.在这东西方交通的十字路口,我们遇到了第一位伟大的希腊哲学家和数学家——泰勒斯(Thales).

泰勒斯生活的年代约从公元前 634 年到前 548 年.他年轻时是个商人,据说到过埃及和巴比伦,他在那里大概接触了具有 10】千年历史的两大文明所形成的数学.晚年,他献身于对知识的探索并建立了第一个希腊学派——爱奥尼亚学派,从此开创了学派的传统;它不是面向商人、儿童、奴隶或书记员们的,而是为希腊社会中的贵族成年男子敞开的一扇知识大门.有一些关于泰勒斯的故事,但无例外都是些二手材料,所以其真实性值得怀疑.不过,这些故事很重要,它向我们展示了他的同胞以及他的

直接继承者是如何看待他的贡献的.

他被后世的希腊人尊为希腊七贤中的第一位.他因开创了希腊几何学、天文学和数的理论而备受赞誉.据称他在公元前585年预测出了日蚀,给他的同胞留下了深刻印象.但是现代学者怀疑他是否真的做出了预测,因为希腊人的天文学知识在当时还相当有限.[4]也有记载说,他曾经买下了米利都和邻近的希俄斯地区的所有榨橄榄机.当采摘季节到来时,他便以高价出租而使自己发了财.他是历史上第一个跟具体的数学发现联系在一起的人.除了创建学派与教授了像阿纳克西曼德(Anaximander)和阿纳克西米尼(Anaximenes)等学者之外,还有记载说泰勒斯还教过伟大的毕达哥拉斯;不过更大的可能是:在泰勒斯退休之后,毕达哥拉斯才加入他的学派的.

有几项数学发现归功于泰勒斯.[5]这些发现中的四项在图19中予以说明.在图(a)中,我们看到圆面积被其直径分成相等的两半,即面积A等于面积B.图(b)展示的是,如果两个三角形的两个角和一条边分别相等,则它们的面积与形状相同(即全等).在图(c)中是一个内接于半圆上的角;泰勒斯证明所有这样的内接角都应是直角(90度).图(d)展示了他的第四项发现,这是指任一等腰三角形的两个底角A和B永远是相等的.他是否确实获得了这些发现并不重要;他的贡献在于他的方法,而不在于应用该方法的具体结果.他最有意义的贡献涉及逻辑推理和抽象.

埃及人和巴比伦人研究几何时,他们是在度量客观的物理对象——地面上的距离或交叉的绳索形成的角等.这时的线是在砂地或地面上划出的有形的线.泰勒斯的一个伟大贡献是用纯抽象的方式说出线、圆和其他形状.线不再是能在砂地上看到的事物,而是存在于想像中的思维的对象.这意味着抽象的线可以是笔直的,抽象的圆可以是完美的圆的.他将物质的形状抽象为头脑中的形状.接着,他做了一件最不寻常的事.他开始进行

【101】

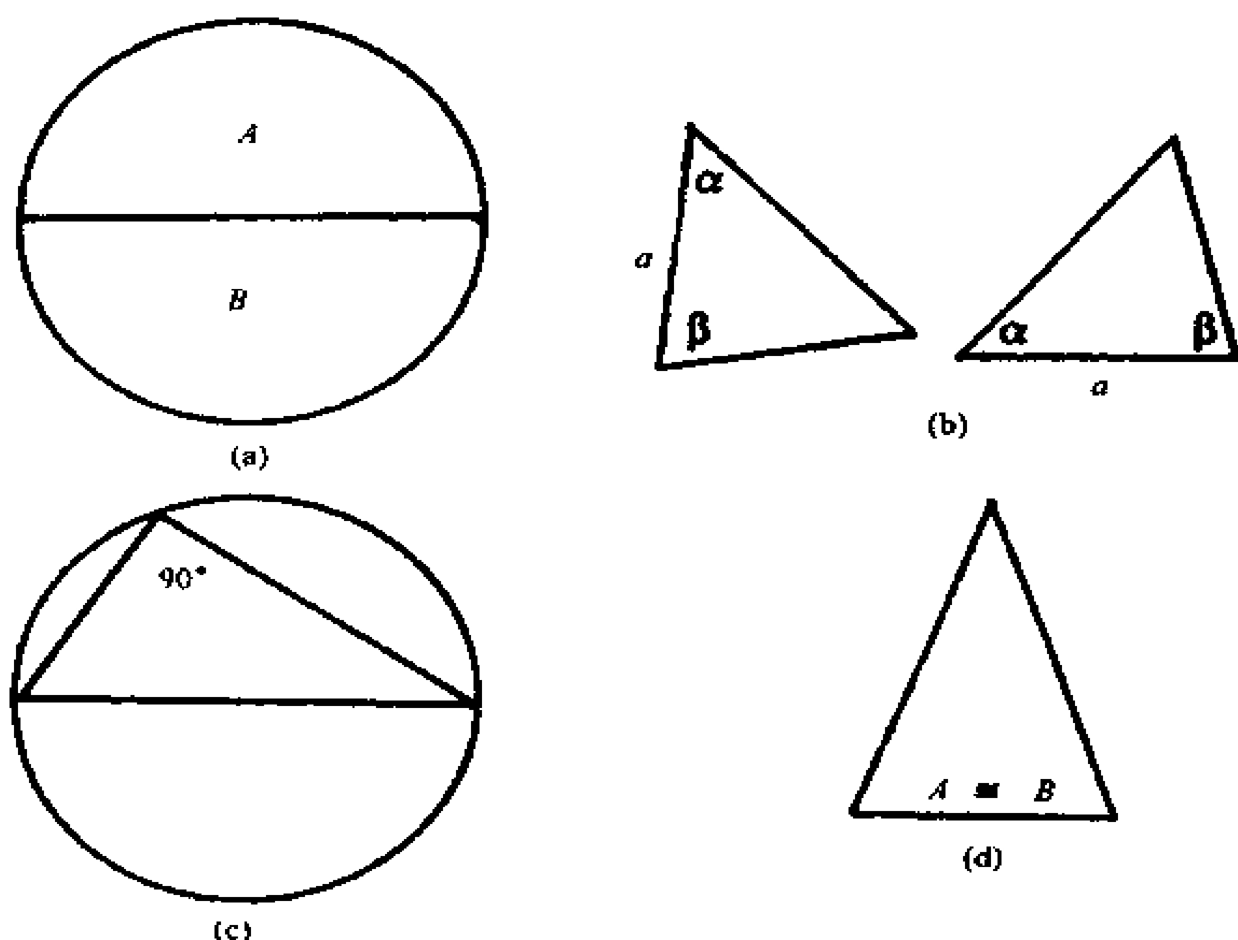


图 19 归功于泰勒斯的四个发现:(a)圆的直径将圆分成面积相等的两部分;(b)一边和两角分别相等的两个三角形具有相同的形状;(c)内接于半圆内的三角形是直角三角形;(d)等腰三角形有两个全等的角.

[102] 逻辑推理,这使他能从一个关于抽象形状的真理出发,去发现另一些真理.这种通过逻辑演绎从一些真理推导出某个几何真理的论证方法,深刻地影响了其他希腊思想家,以致开始了利用逻辑演绎法去发现一切真理的全面努力.结果,在希腊确立了演绎的科学方法,它对西方思想的影响达两千年之久.

希腊人要求他们的真理绝对可靠,不给错误留下任何的余地.为达到这一目的,办法是接受那些不证自明的前提,然后演绎出结论,后者必定也是绝对真实的.所以,如果他们的演绎结果与经验不同,那么就必须放弃经验而支持演绎.另一方面,现代科学依赖于经验;正是经验提示了各种法则(这些提示被称为

假设).然后我们利用逻辑来预测未来的经验并论证这些被预测的经验.数学模型在最初可能是纯抽象的创造,但在科学中运用时,它们必须与经验相联系.在我们的科学中,如果经验与假设(或者说数学模型)有异,我们会放弃那些假设而寻求更好的假设.

演绎方法在纯粹数学研究中运用得很好,但在科学研究中孤立地使用这种方法却会招致灾祸.事实上,希腊人通过演绎法发现了很多几何对象之间的关系,他们的科学却由于方法的缺陷而受到严重阻碍.这就引出了关于现实和数的基本属性这方面的一些非常奇怪的结论.我们可以说,泰勒斯以其演绎方法及由此发现的几何真理(伴之以对几何形状的抽象)给予了我们很大的馈赠,但是后来的希腊人由于受他这一方法的影响,错误地将其应用于追求一切类型的真理上,结果妨碍了科学的发展.幸运的是希腊还有一些愿意实践并依靠经验的思想家.在公元前4世纪,亚里士多德(Aristotle)进行了解剖以收集生物信息;而活跃在公元前3世纪的阿基米德(Archimedes)在探索物理规律时进行了基本的实验工作.然而直到很多个世纪之后,这种实验的方法才在现代科学中兴盛起来. 【103】

伟大的毕达哥拉斯

当时的舞台是为那个一切时代中最伟大的数学家之一毕达哥拉斯(图20)建造的.关于他的生卒年众说纷纭,但公元前580年至前500年可能比较接近他所生活的时代.他的出生地是离米利都不远的萨摩斯岛.有些人宣称,他直接跟泰勒斯学习,因为他们生活的时期部分重叠;另一些人则说他们的年龄差异太大,上述说法不大可能成立.[6]我们确实知道毕达哥拉斯年轻时曾到各处游历,访问过埃及和巴比伦.因此,当泰勒斯在世时,他可能在米利都也可能不在米利都.总之,他有可能就学于爱奥尼亚学派,在那里他会学到了泰勒斯的演绎方法.

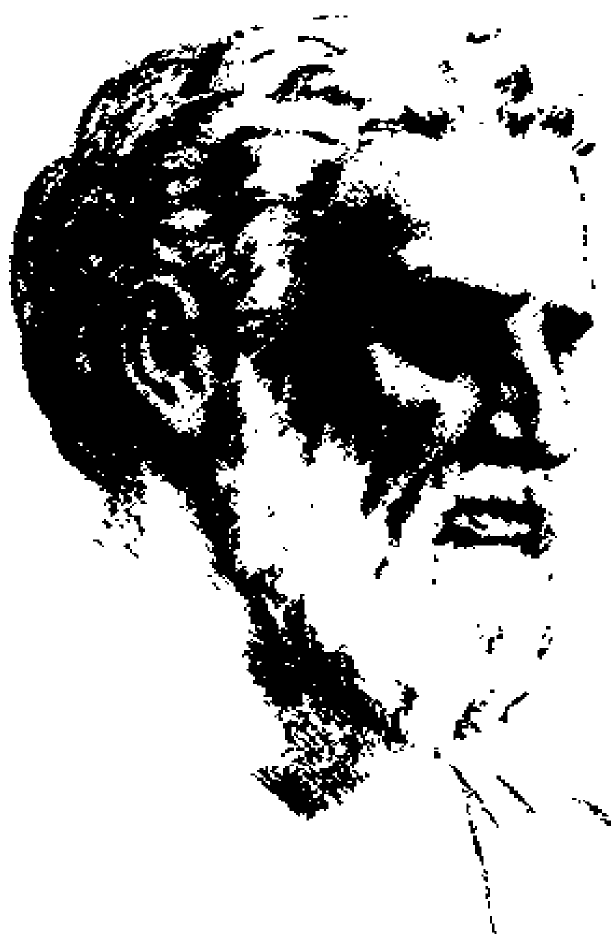


图 20 毕达哥拉斯,约公元前 580—前 500 年.(布朗兄弟出版社,斯
104】 特灵市,宾夕法尼亚州)

毕达哥拉斯在晚年效仿泰勒斯,在大希腊(Magna Graecia)的克罗托内(Croton)(意大利南部)建立了一个学派.毕达哥拉斯的团体超出了学派的范畴,它是由近三百名从半岛周围的地区来的富裕而有权势的年轻人组成的宗教团体.其宗教仪式包括各种净化灵魂的典礼,因为毕达哥拉斯相信灵魂在死后仍然存在,并将附着于别的躯体内——甚至是动物的躯体内.这些仪式也涉及数学内容.他的弟子分为两种,一种是内部成员,或称 mathematikoi(相应于我们的"数学"一词),可以聆听老师创立的最秘密的真理;另一种是外围成员,称为 akousmatikoi(即那些"旁听者"),他们成为会员只是因为他们遵守该神秘团体的戒

律.每位 mathematikoi 首先必须作为旁听者通过入会考验,然后才能成为内部成员.该团体成员被要求发誓保守秘密以防止扩散他们的思想.毕达哥拉斯本人没有作品流传于世,所以有关他的一切材料都是第二手的.

毕达哥拉斯到底是在什么环境下死去的,现在仍是个争论的问题,不过他确实生活在一个比较先进的时代.后来, 由于当



图 21 柏拉图,公元前 427—前 347 年.(布朗兄弟出版社,斯特灵市,宾夕法尼亚州)

另一方面,希腊人所研究的、他们称为算术(arithmetic)的学问,乃是对于数进行理论的研究.希腊意义下的算术并非我们的算术,而是我们现在所谓的数论.他们认为算术是值得真正的学者去研究的题材.

把数的研究划分为算术(逻辑斯蒂)和数论(算术)并不恰当.这就意味着算术该遭忽视而唯有数论才值得研究.然而在此之前的几千年里,人类在数的方面的进步一直是由实际问题所推动的,正是这些问题使我们有了自然数和分数.现在希腊人决定看轻对这些数的运算,而把精力集中到其他地方.

毕达哥拉斯学派的人尤其醉心于数论.这可能始于毕达哥 [107] 拉斯本人的一项发现.他发现的是拉紧的弦的长度与弹拨它时产生的乐音之间的关系.首先,他看到如果把弦缩短到原长的一半,则会产生一个高八度音.相差八度的音产生"和声",能使我们的听觉获得愉快的感觉.接着他又找出了能产生其他和声的弦长;也就是说,弦缩短至原长的四分之三产生第四音,缩短至三分之二产生第五音①.毕达哥拉斯自问各种不同弦长产生和声的原因何在?他的回答跟物理学无关,不涉及弦在空气中的振动和我们耳朵的声学结构.相反,他下结论说,和声完全是某些确定的数之间的比率所造成的,诸如一比二、三比四与二比三这些数的比.由此,他又大胆地归纳出所有的事物都依赖于数和数之间的比.

我们看到,毕达哥拉斯的信徒热衷于研究数之间的关系并用于解释几乎所有的事物:数学、科学、天文学、宗教、政治——一切都得依赖于数.令人惊异的是,毕达哥拉斯心目中的数仅仅

① 例如,假设一根拉紧的弦弹出的音是 do,那么当取其长度为原长的一半时弹出的音是高八度的 do,取其长度为原长的$\frac{2}{3}$时弹出的音是 so,而取其长度为原长的$\frac{3}{4}$时弹出的音是 fa.——译注

包括自然数.分数不能算作是真正的数,因为它们只是一些比——表明两个整数之间的关系."等一等,"你可能会说,"这是倒退.我们从埃及人和巴比伦人那里已得到了分数."完全正确,老毕达哥拉斯完全忽略了人们花了几个世纪才取得的成果.既然他似乎遗弃了分数而只探讨自然数,那么为什么还有人认为毕达哥拉斯是伟大的数学家呢?这个故事还刚刚开始.

现在我们来欣赏毕达哥拉斯的主张——任何事物都依赖于数——跟希腊人与演绎科学密切结合这一特征的关系.如果一切事物都依赖于数,那么,为了通晓所有的真理,我们必须且仅须做的事就是去演绎有关数的真理.为此,我们从关于数的自明的真理出发,推导出大量的结论,它们必将包含我们生活于其中的这个物质世界的真理.这种方法意味着演绎科学并不需要去研究自然.大家可以不去理睬所有的经验,那是些无关紧要、毫无意义的东西.我们只须关注数和它们有趣的特性(数论),就可以发现一切真理.

108】

在试图填补数论与现实世界间的缺口时,毕达哥拉斯学派的成员提出了一些怪异主张.实际上,他们创立了一套数字神秘主义的说教,这在今天的占卜术中仍明显可见.例如,奇数表示男性,偶数表示女性.诸如四和九这样的完全平方数代表公正;五代表婚姻——即奇(雄性)与偶(雌性)的结合.六是灵魂之数,而七代表理解和健康.[9]天体必须依适当的距离排列使得相互之间有确定的比率,且必须跟和谐的音乐合拍.因此,我们球状的天体也产生和声.事物本身严格地由数来组成.宇宙的创生正是由数引起的.它从一(单子,有限物)开始,然后受无限原理支配被分成二(一对).

这种数字神秘主义是怎样发展起来的呢?回顾一下毕达哥拉斯学派成员摆弄这些"数"的方法颇有教益.他们用石子摆成各种不同的形状,它们揭示出许多有关数的真理.这类研究可能源于古代在算板上用卵石计算的实践.卵石在希腊文中写成

"psephoi",是我们的"计算"一词的源头.他们的有些发现成为现代数论的基石.例如,他们发现某些确定数量的卵石的汇集可摆成三角形状.最小的这类汇集由三块卵石组成,所以,三就是个三角形数(图 22).其他能够构成三角形的数是六、十和十五.然后他们注意到这些三角形的数(三、六、十和十五)是若干连续的自然数之和:

$$1+2=3,$$
$$1+2+3=6,$$
$$1+2+3+4=10,$$
$$1+2+3+4+5=15.$$

【109】

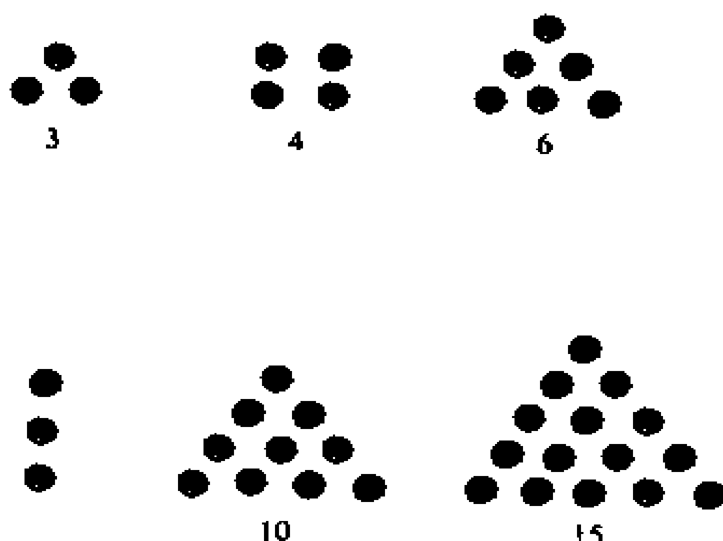


图 22 卵石的若干种排列,显示了四个三角形数 3,6,10 和 15,以及两个完全平方数 4 和 9.

所以,最早发现的数论成果之一是,若干连续的数之和是三角形数.如果我们来看连续的奇数之和,则会得到平方数:

$$1+3=4=2\cdot2,$$
$$1+3+5=9=3\cdot3,$$
$$1+3+5+7=16=4\cdot4.$$

素数是一种只能被 1 和它自身除尽的自然数.例如 2,3,5 和 7 都是素数.合数是指除能被 1 和它自身外还能被其他的数

除尽的数；4 就是一例，它还能被 2 除尽. 比 1 大的一切自然数不是素数就是合数. 这种特性导出了数论中的一整个研究领域. 毕达哥拉斯的信徒知道素数与合数的不同，并称毕达哥拉斯一直在寻找一种判别法以鉴定一个大数是素数还是合数. 他们发现了完全数，这是指那些其因子之和恰等于自身的数. 例如，6 【110】 等于 1 + 2 + 3 的和. 下一个完全数是 28，它等于 1 + 2 + 4 + 7 + 14. 正是从这些具体的观察中他们建立了数论这门学科.

将卵石或几何的点跟数等同起来，使毕达哥拉斯学派有可能把物体形状和特殊的数视为同一物. 因此，最简单的二维图形——三角形变成了跟 3 是等同的，而最简单的三维图形——四面体则跟 4 等同. 毕达哥拉斯学派用这种方式逐步建立了用来说明物质对象的几何形体. 亚里士多德在他的《形而上学》一书中，对毕达哥拉斯信念作了注解：数实际上正是物质现实中的原子.

> 他们（毕达哥拉斯学派的成员）假定数的要素仍是一切事物的要素，整个天空就是各种音阶与数……显然，当时的这些思想家还认为数是作为事物的实质内容和实现其变化与永恒两种状态的本原……[10)]

在同一部书的稍后部分，亚里士多德说：

> 再者，由于看到数的许多特性属于人们可感知的物体，毕达哥拉斯的信徒便假定真实的物体都是数——不是独立的分离的数，而是组成那些真实物体的数. 为什么？因为数的特性出现在音阶中，出现在天空中，出现在许许多多其他物体中.[11)]

这里我们看到了毕达哥拉斯学派所倡导的一种原子理论，

即原子由空间中的点组成，而那些点本身就是数．难怪他们和许多受到他们影响的希腊人相信，对于数的研究会揭示宇宙中的一切秘密．这种以数为原子的信念在我们看来似乎过于天真，不过我们应该记住一个现代的假设：物质由原子构成，而这些原子几乎不占空间！当我们想抓住原子的其余部分，即电子、质子和中子时，他们却又消失在太多的古怪对象之中，而后者似乎破坏了我们关于空间和时间的观念．

我们可能会问，如果数就是点的汇集又占据空间的话，那么单个的点之间相隔多远呢？这就是说，如果空间中有一个四面体（那它当然就是数“四”），那么作为它的各个角的点相隔多远呢？毕达哥拉斯学派的答案是：间隔开这些点的长度应该呈现为整数比的关系．换句话说，几何数表示的不同边长间的关系必定可以看成是整数比的形式．这是关键之所在，早期的毕达哥拉斯派的信徒显然认为这是当然的事．只是到后来，即毕达哥拉斯逝世之后，这种观念才又重新萦绕人们心头，让人不得安宁．【111】

在数演进的这一关节点，人们将数与几何合为一体．在毕达哥拉斯信徒的眼中，数就像直线和圆一样是几何的对象．事实上，由毕达哥拉斯的信徒给出的数论方面的证明都是几何证明而非代数证明．下面我们通过一些实例来看看他们的具体做法．

毕达哥拉斯的贡献

你可能想说，毕达哥拉斯学派的成员只不过是些愚蠢的、天真的神秘主义者，对数学的发展有不良影响，绝非古代的伟大思想家．不过，我们最好还是退一步想一想，以更开明的观点来看待他们的成就．他们确实获得了大量的数学发现，其中包括什么样的几何图形具有相等的面积，这是比例理论的基础；还有大量涉及三角形、圆、平行线和球的定理；以及数论方面的一些早期发现．

当然，他们最重要的工作肯定是关于直角三角形的那个定

理——现在我们称之为毕达哥拉斯定理.这个定理非常简单,然而它对后来的理性思维的重要性跟它的简单性不成比例.该定理说:直角三角形两直角边长度的平方和等于其斜边长度的平方(见第4章图14).

数学大厦必不可少的一块基石就是有关定理的概念.我们可能知道某条用于计算的一般规则,但并没有证明过这条规则永远适用.当有可能从我们认为是真理的定理或公理出发推导出这条规则,那么这条规则也就成了定理,也就是说,我们知道[112]这条规则将永远适用.定理的概念起源于希腊人.今天许多搞纯理论的数学家认为他们自己的工作就是从一组公理出发来推演各种定理.

我们从过去的资料得知,毕达哥拉斯数(三个长度,用它作三角形的三边恰好构成一个直角三角形)早为更古老的社会所知.埃及的测量员(使用绳子测量土地者)知道把绳子分成长度为三、四、五的三段,能构成一个直角三角形(因为 $3^2+4^2=5^2$),但是他们大概并不知道这个普遍的定理.巴比伦人可能已经知道这一普遍的定理,但大概没有证明它.中国人也先于希腊人发现了这一定理,然而当时没有提供演绎的证明.所以,其他的文明在知道毕达哥拉斯定理这个一般的规则时,却并不能证明这一规则永远成立.

希腊人的天才正在于他们既知道一般规则又能证明它,从而将规则提高到定理的地位.有一点可以肯定,毕达哥拉斯学派已经有了毕达哥拉斯定理的证明;还有人认为毕达哥拉斯本人已给出了这种证明.我们将介绍欧几里得在《原本》一书中提供的一个证明但不去叙述证明的细节,你能在大多数数学史书中找到这类细节.[12]介绍这个证明有两个很好的理由:第一,这个定理对希腊的数的概念的演进很重要;第二,这个证明展现了希腊人是怎样进行几何证明的.图23展示了一个直角三角形,以及在此三角形的每一边上画出一个正方形,它们的面积分别记

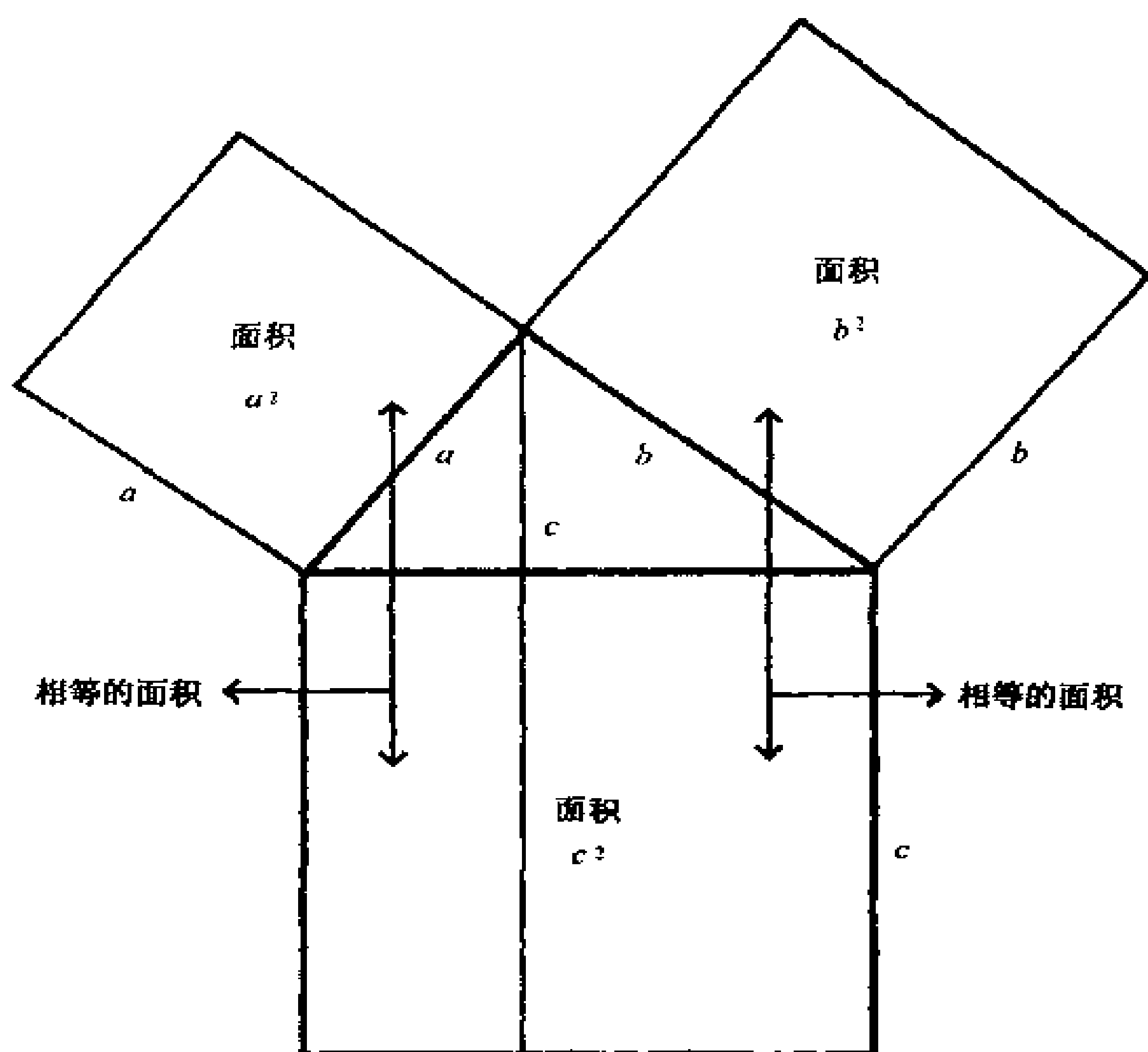


图 23 毕达哥拉斯定理的证明．面积 c^2 中的小矩形等于面积 a^2，而大矩形等于面积 b^2．这就证明了 $a^2+b^2=c^2$．

为 A，B 和 C．显然我们想证明面积 A 和面积 B 之和等于面积 C．这样我们便得到 $a^2+b^2=c^2$，此即该定理的结论．欧几里得从直角处向下画一条通过 C 且平行于 C 的两条侧边的直线．然后他证明 A 的面积等于 C 中左侧矩形的面积，面 B 等于 C 中右侧矩形的面积．于是得到面积 $A+B=$ 面积 C．

图 24 给出了第二种严密直观的证明．图 24 的左边画有一个正方形，其内部套着第二个正方形．第二个较小的正方形的面积等于斜边的平方，即 c^2．四个三角形都是边长为 a，b 和 c 的

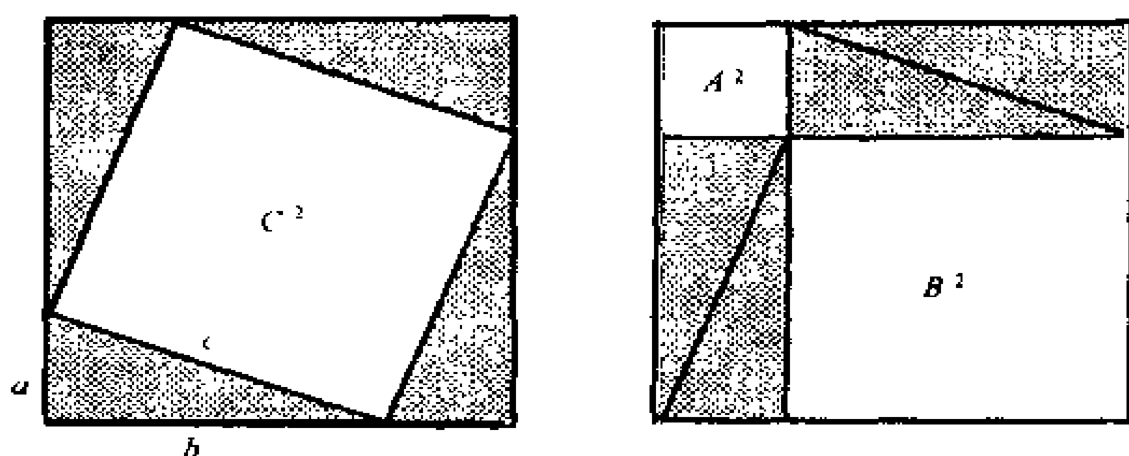


图 24 毕达哥拉斯定理的一个直观证明. 我们根据重新摆放的四个带阴影的三角形(左图)可以把面积 c^2 变换成 a^2 和 b^2(右图).

直角三角形. 现在我们把这四个三角形从左边取出来重新摆放到右边. 注意右边图形中两个无阴影部分的面积实际上就是 a^2 和 b^2. 因此, 左图的无阴影部分的面积等于右图的无阴影部分的面积, 即 $a^2+b^2=c^2$.

[113]

两千年来, 毕达哥拉斯定理一直被认为是欧几里得几何中的一件瑰宝, 而欧氏几何作为标准几何学在西方讲授了两千年. 然而, 毕达哥拉斯学派的重要性远远超出了他们在几何和这一特殊定理上所做的贡献. 毕达哥拉斯和他的追随者的一项贡献是使科学、特别是数学研究, 在那些有财产的、富裕的希腊人中普及开来. 有权势的希腊家族想把他们的子弟送进好学校去学习泰勒斯和毕达哥拉斯所发现的东西. 这种自愿的参与使希腊人达到了他们在科学和哲学思想方面的黄金时代. 毕达哥拉斯学派的数学和哲学思想影响了后来的许多思想家, 特别是理想主义之父柏拉图.

[114]

现在我们该来考虑一下毕达哥拉斯学派有关数的另一项发现. 不过, 这个发现与其说是向前推进了数的疆界, 不如说是阻碍了数学几个世纪的发展.

无 公 度 性

毕达哥拉斯学派相信，几何数(点)的距离之比必须是整数之比．这给毕达哥拉斯的信徒们惹出了麻烦，而且无意中发现了一类全新的数．请看一看图 25．我们将假设两条边 a 和 b 都是单位长的．此时它的斜边，或者说边 c 有多长呢？毕达哥拉斯的门徒说 c 边和 a，b 两边必定要用两个整数的比来表示．这个比能是多少呢？我们可以用毕达哥拉斯定理得出这个数的符号表示(即 c 边的长度)．

[115]

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2，因此$$

$$c = \sqrt{2}.$$

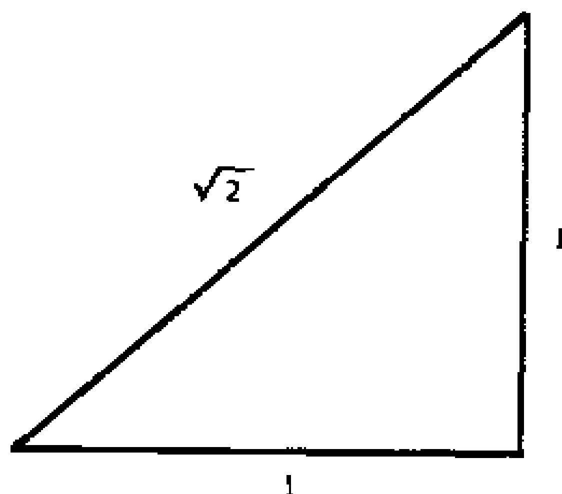


图 25　两条边的长度为1的直角三角形．斜边的长度是$\sqrt{2}$，它不能表示成任何整数的比，因而它跟直角边的长度是无公度的．

这个奇怪的 2 的平方根究竟有多长呢？与其糊里糊涂地担心，不如找个特殊的直角三角形来仔细琢磨琢磨这个长度．不过，这也是一个很普通的值，因为它不就是边长为一的正方形的对角线吗！(图 26)

毕达哥拉斯肯定相信可以找到两个自然数，使它们的比等

于这个值. 不幸的是，有一位我们无法知道其身份的毕达哥拉斯学派的信徒，在毕达哥拉斯死后证明了不存在这样的自然数！也就是说，c 的长度跟 a 或 b 的长度是不可公度的. 无论 c 和 a 或 c 和 b 之间的比是什么，反正它永远不可能恰好等于一个分数，希腊人称这种长度是 alogos，即"无法表达的"，或称之为ar-

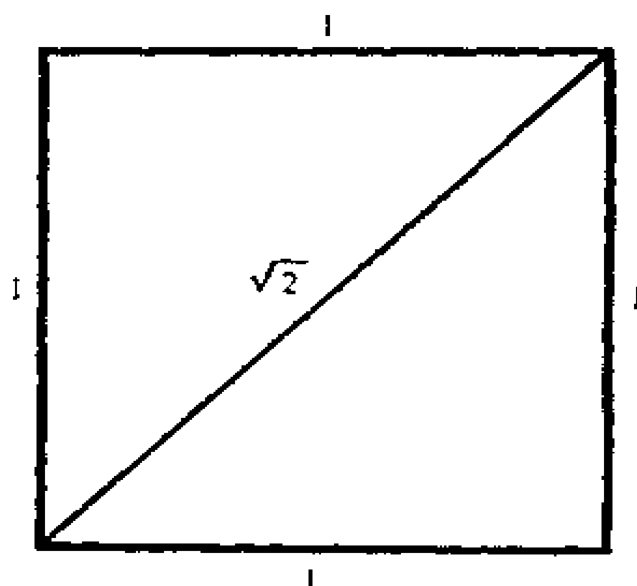


图 26 边长为1的正方形. 长度为$\sqrt{2}$的对角线跟边长是不可公度的.

ratos，即"不存在比的". [13]这一思想抹杀了毕达哥拉斯宇宙论的关键特征. 如果像这样的不可公度的长度存在的话，还怎么能说宇宙万物都是依赖于自然数和它们的比的呢？这些长度显然不符合毕达哥拉斯学派定义数的方式.

16] 说这一发现引起了公愤还不足以反映实情. 到底发生了什么？有许多不同的故事，当然它们不一定都是真的. 一些古人把这一发现归于梅塔蓬图姆（Metapontum）地方的希帕索斯（Hippasus），他生活在 5 世纪，是毕达哥拉斯社团的成员. [14]一个故事说希帕索斯向外人透露了存在着不可公度的长度这一发现，因而违背了严守秘密这一社团的规则，有些人曾说毕达哥拉斯因希帕索斯背信弃义而将其溺死，但这个说法很值得怀疑，因为那时这位伟大的导师多半已不在人世了. 另一些故事说，这一发

现惹怒了众神，于是把他抛入大海.[15]这故事的另一个版本说，是毕达哥拉斯的信徒把他从船上扔进水里淹死，或他们在湖里溺死了他.无论真相如何，这些故事都表明这一发现对毕达哥拉斯学派关于数的概念招来了多大的灾祸，他们本来相信数是有形的，而且可以向空间延伸.

证明 2 的平方根是不可公度的量其实很容易.由于这一发现十分重要，我们在这里给出由欧几里得为我们保存下来的一个证明.我们先假设存在两个数可得出我们的比.它们分别记作 p 与 q.于是，$\frac{p}{q}$ 等于$\sqrt{2}$这个值.我们当然可以把 p 和 q 都分解成素因子的积并消去相同的因子.此时这两个数已不可能都是偶数，否则它们就都含有相同的因子 2.所以从一开始我们就可以认为如果两数中有一个是偶数，那么另一个必是奇数. [117]

我们已经假设 $\frac{p}{q}=\sqrt{2}$.若等式两边取平方则得到 $\frac{p^2}{q^2}=2$.再将等式两边都乘以 q^2 便得到 $p^2=2q^2$.此式说明 p^2 是另一个数的两倍，因此 p^2 必是偶数.由此推出 p 也必是偶数，因为如果 2 是 p^2 的因子，则它也必是 p 的因子.既然 p 是偶数，那么 q 一定是奇数，因为两者不能都是偶数.

如果 p 是偶数，我们可以将它表示成 $2r$.当我们用 $2r$ 来代替它时就得到 $(2r)^2=2q^2$.由此推出 $4r^2=2q^2$.用 2 除该式两边得到 $2r^2=q^2$.这告诉我们 q^2 是一个偶数，即它等于另一个数的两倍.但是这意味着 q 也必须是一个偶数.然而我们已经知道 q 必是奇数.所以，由假设中的 p 和 q 的存在导出了矛盾的结论：二者不能都是偶数，二者又全是偶数.因此，最初假定的 p 和 q 是不存在的.所以，没有两个自然数的比是 2 的平方根.

这种先假设跟需要证明的结论相反的结论成立，然后说明它会导致逻辑上的矛盾的方法，是希腊人经常使用的方法，尽管他们不是最先使用这一方法的人.他们称这方法为“反证法”(reduction ad absurdum，或称归谬法).

那位默默无闻的毕达哥拉斯学派成员发现的这个不可公度的量(长度)，在当时还没有糟糕到无人问津的程度.大约在公元前400年左右，在柏拉图指导下从事研究的泰特托斯(Theaetetus，前420年？至前369年)给出了一个一般性的证明，说明本身不是像4或9那样的完全平方数的任何自然数，其平方根相对于1是不可公度的.因此，一切由$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$等表示的量相对于1都是不可公度的.毕达哥拉斯由于发现了弦长的整数比跟乐音及和声之间的关系，从而相信世界万物都建立在整数比之上.这一思想成为毕达哥拉斯的全部宇宙观的基石.当证明了确实存在某些几何长度，它们的比并非整数之比，这对毕达哥拉斯的宇宙观和物理学是致命的一击.不过，这也把希腊人推到了发现一类新数的边缘，这类数即我们现在所说的无理数.但是他们对这一发现所蕴涵的结论感到极度恐慌以至于只好向后退却.凡是毕达哥拉斯学派的人讲到数与几何量的统一的内容，都遭到后来的希腊人的拒绝.因此，人们不再把数与长度结合在一起考虑.这不幸导致了研究点和线(具延展性的对象)的几何学与探讨数的性质的代数学之间的分裂.这种分裂持续了两千年，直到勒内·笛卡尔(René Descartes)最终将它们合二而一成为解析几何.在毕达哥拉斯学派的阿尔希塔斯(Archrtas)定义数学的各个领域时，这种分裂一目了然：数学是音乐、几何、天文学和数论.代数在哪儿呢？它实际上被忽视了.这四个领域被阿尔希塔斯定义为四大学科，这一说法又被亚里士多德所采纳，它们一直作为数学学科的课程被教授着，直到文艺复兴时代.

118】

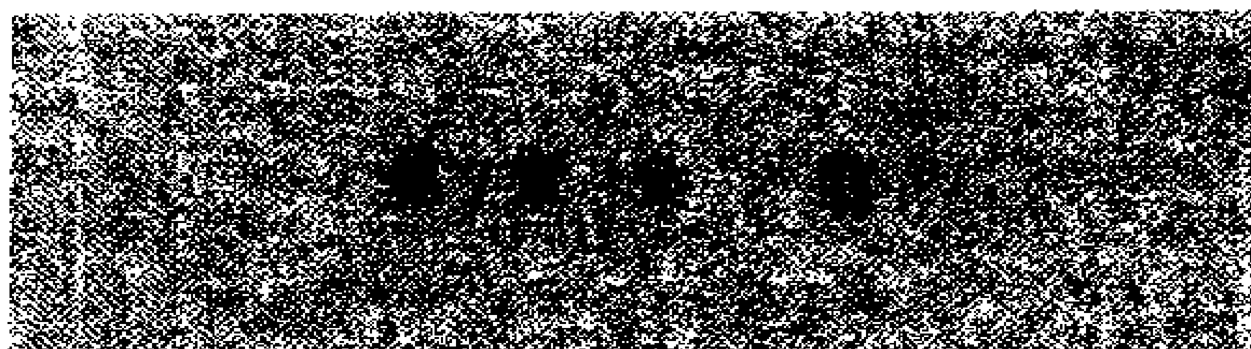
亚历山大时期

我们不能认为大多数希腊数学家都是在公元前600年至前300年这一古典时期成长起来的.尽管这一时期的研究工作确定了希腊人思考数的方式，但并没有产生希腊几何学的主体.几何学的重大发展出现在第二阶段，即亚历山大时期.

亚历山大大帝于公元前 323 年去世，其后他的将军们分割了他的王国．一位名叫托勒密（Ptolemy）的将军统治了埃及．若干年前，正是亚历山大本人在尼罗河三角洲建立了亚历山大新城．托勒密则开始在亚历山大建立图书馆和学校，邀请世界上最伟大的数学家之一欧几里得在此授课．大批杰出的数学家追随欧几里得来到亚历山大，他们为几何学增添了许多定理，其中的大量成果写进了欧几里得伟大的几何著作《几何原本》之中．即便在被大大忽视的代数领域，晚些时候即公元 3 世纪时的丢番图也做出了贡献，他出版了著名的《算术》一书．欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯（Apollonius）和丢番图在几何与代数两方面为希腊做出了重要贡献．然而，这些进展并没有扩展到数论方面，要了解后者的发展，我们必须转向东方和印度． [119]

我们该怎样总结希腊人在认识和使用数方面的贡献呢？毫无疑问，泰勒斯、毕达哥拉斯以及毕达哥拉斯学派的工作并不能代表丰富多彩的希腊演绎数学．不过演绎数学的音符已经在古典时期奏响，最令人感慨的则是已被开启的无理数之门又被砰然关上了．

最后，我们应该承认希腊人的贡献，包括对于数和几何图形的抽象，在建立定理过程中运用演绎证明方法，以及在几何方面的许多伟大发现．为公正起见，我们也应指出他们的不足之处．他们认为通过演绎法可以获得一切真理，包括要凭经验才能获得的真理．他们没有把分数当作真正的数，而且还把代数（或者说数的符号运算）跟几何割裂开来． [120]



本章将考察有长达四千多年历史的几个论题.正如我们已经看到的,古典时期将近终结时,数的概念在希腊已停止不前,在对待分数的问题上实际是倒退了.为了拯救落入困境中的数,我们得去探寻一下零、负数以及印度–阿拉伯数系的发展踪迹.它们对于现代数论的成长是功不可没的.

数的直线(简称数线)

在开始正式探索前,我们要离开本题,先介绍一个有助于理解我们将遇到的各种类型的数的概念.前面我们提到毕达哥拉斯学派试图把数直接与几何图形联系在一起,最后却失败了.现在我们来做同样的努力:在一条直线上为每个数指定一个位置.你可能会提出疑问:"那不正是毕达哥拉斯学派所做的吗?难道还没看见他们得到的后果吗!"你可能是对的,但我们不会把数与几何点混淆在一起.我们知道它们是不同的.然而,把数与点联系起来,我们可以更好地说明各种不同种类的数以及它们之间有些什么关系.

我们将从零和自然数开始.让我们取一条像图27(a)中那样的普通直线.我们可以想像这条直线是向两个方向无限延伸的,所以我们能见到的只是直线的一部分.现在我们选择一个点并把数"零"指派给这个点,正如图27(a)所示的那样.

21】

在继续往下做之前,让我们再统一一下思想,弄清楚直线和

点的准确含义.你在图 27(a)中看到的那条物质的线并不是我们要讨论的线.我们所谈论的是存在于我们头脑中的想像的线.图 27(a)中的线只是用来帮助我们把想像中的线加以形象化.这条物质的线有宽度(否则我们看不见它),但存在于想像中的线是没有宽度的.还有,我们想像中的线可以无止境地延伸(尽管我们的肉眼看不到它的这种延伸),而物质上的线则局限于书页上.对于图 27(a)中的小圆点也一样,它用来表示点.我们想像中的点既没有宽度也没有长度.它们仅仅代表直线上的一个位置.我们利用图 27(a)中的物质的点,只是传达一种含义以帮助我们形象地看到一种场面.再说一遍,抽象的线是没有宽度的,抽象的点既无宽度也无长度.它们只是表示一种位置.

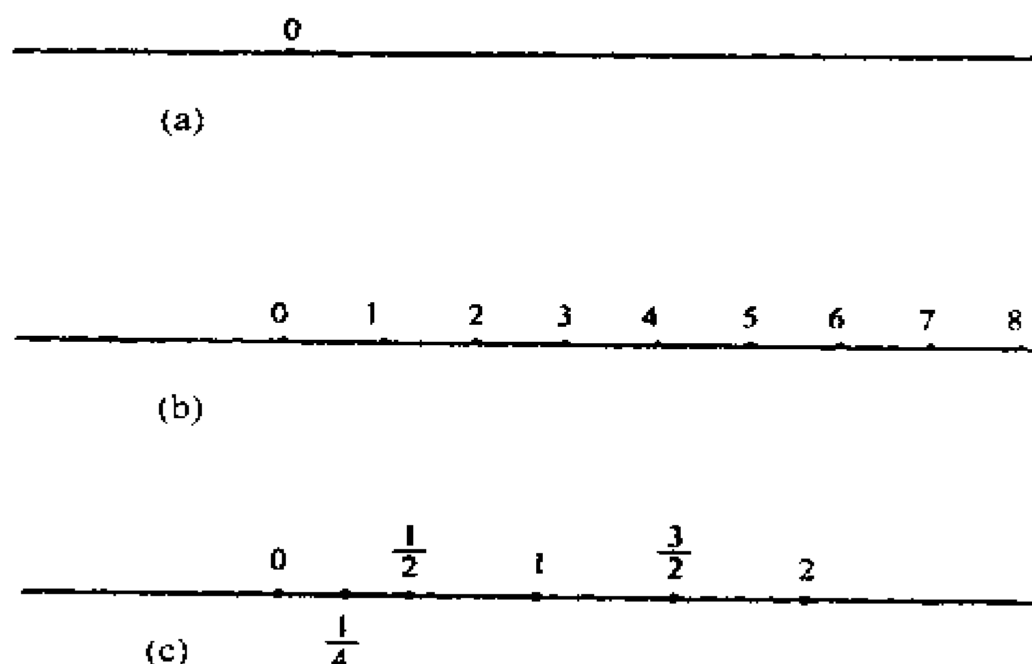


图 27　建立数的直线.

[122]

好,现在我们来建立数的直线的概念.注意,我们已在直线上确定了零的位置,接着我们向右移动一些距离并指定一个表示数 1 的点[图 27(b)].我们到底向右移动多远,这对建立数的直线无关紧要,不过为了能表示出更多的数,我们仅移动了大约半英寸.下一步,我们再向右移动同样的距离,并确定代表 2 的



点.按同样的做法,我们在直线上确定了代表从0到8这几个数的点.我们可以想像所有的自然数都被指派到不同的点上了,每个点都比前一个点向右移一个单位距离.

我们已经为每一个自然数和零都指定了一个点与之对应.但是我们知道巴比伦人和埃及人把分数也包括在数的范围之内,所以我们也要把点指派给分数.在图27(c)中,我们把图27(b)中数的直线放大,此时只看到直线上的0,1和2.在0和1之间我们可以为分数二分之一和四分之一确定其位置.办法是当向0右方移动到1的一半距离时,把该点指派给二分之一,而把移动到四分之一处的那点指派给分数四分之一.这是我们为所有分数定位的方法:我们只要从零出发向右移出相应的距离,把所到达的点指派给适当的分数.对于每一个自然数,都存在一个与之对应的单分数.你立刻可以看到埃及人的所有单分数都落在数的直线上表示二分之一和零的两个点之间.当然,埃及人能用单分数的和来表示其他分数;除三分之二外,他们总是只使用单分数.他们用一种特殊的符号表示三分之二,可能是因为它经常出现.

当数的直线无限向右延伸以表示所有的自然数时,无穷个单分数却都呆在了零与二分之一间的位置上.这说明很多很多的点挤在一个狭小的空间里.但是请记住,我们指派给分数的那些点是没有宽度的,所以这儿有足够的空间来容纳所有这样的点.

我们可以在数线(注意,数线是数的直线的简称)上确定出所有的真分数(指分母不为1的分数)的位置.例如,要确定二分之三的位置,我们只需把零和一之间的距离分成两等分,然后从零出发向右移动等分后所得长度三倍的距离.三个二分之一的长度正好使我们到达图27(c)中位于一和二正中间的位置.用这种办法可以为所有的真分数确定在这条直线上的位置,于是零右侧的整条线上密密麻麻地挤满了分数.事实上,这些分数将分布在零

的右方我们所能想像的任何一个地方.也就是说,不管多么短的线段内都会有分数.我们可以想像手里拿着一面威力无限的放大镜,用它来观察这条直线.当我们用它放大直线上的一段时,就会看到被放大的线段上布满了分数.我们接着把这段线放大再放大,我们总是能看到越来越多的分数.简直不存在任何一小段线上没有分数的.所以说这种数是稠密的,这一思想极重要,后来得到了充分的发展,并已证明对未来的数学十分有用.

所有位于零左边的点怎么样呢?我们能给它们指派数吗?能,因为那里正是我们安置负数的地方.

印度的数

印度次大陆上的早期数学产生的年代与重大事件,几乎无迹可寻.不过,我们确实知道有一种伟大的土生土长的古代文明在这块土地上萌芽并创造了文字和数的艺术.最古老的证据来自位于今天巴基斯坦的印度河流域的考古遗址(摩亨朱达罗)地区.[1]这一文明可追溯到公元前两千五百年左右,大约相当于埃及建造金字塔的时期.摩亨朱达罗的居民发明了文字和十进制数系.遗憾的是无从知道他们的数学的其他情况.

大约在公元前1500年左右,说印欧语系语言的人群(雅利安人)向东南方迁移,入侵了印度,并建立了以社会等级制度为基础的印度国,其中婆罗门人为最高等级的国民.印度的婆罗门人使用梵文书写,全部知识只在有特权的阶层内部流传.这种神神秘秘的学问之道压抑了数学思想的记载和传播.直到佛陀①(Buddha,公元前560年至前483年——毕达哥拉斯生活的时代!)登场,婆罗门人的这种独占权才受到了新宗教——佛教的挑战,此时文学也开始繁荣起来.可惜,那个时代的数学作品已散失.我们能看到的第一部印度数学著作是在公元5世纪问世

① 佛教徒对释迦牟尼的尊称.——译注

的.有些印度的文学作品告诉我们,某些数学内容在上个千年期124】间就有了.

在公元前800年到公元200年,有一些宗教性质的印度著作问世,它们统称为绳法经(Sulvasūtras).绳法经中的准则规定了每个家庭的家长该如何去建筑他的家庭祭坛.[2)]最普通的形状是圆形、方形和半圆形.不过,每种形状的祭坛都应该具有规定好的相同的大小.这引发了包括等面积问题在内的原始几何学的发展.例如,我们发现了一个早在公元前4或5世纪写下的$\sqrt{2}$的近似值,但没有任何线索说明其作者是否知道这仅是个近似值.在绳法经中也发现了跟毕达哥拉斯数有关的资料:譬如三、四、五这样的数组.遗憾的是,我们对这一时期的情况就知道这么一些.

公元200年,绳法经时期即告结束.其后是悉檀多(Siddhāntas)①时期.在这一时期出现了印度的第一部著名的天文学著作《太阳系》(Sūrya Siddhānta).由此开始的大量工作都是为解决天文学问题而做的;这时,许多重要的数学家被指派担任宫廷天文师.第一位知名的印度数学家阿耶波多(Āryabhata)生于公元476年.他的作品为印度的十进位值制数系提供了最早的证据.他还使用三角学进行球面测量.他估算的π值为$\frac{62\,832}{20\,000}$或3.141 6,这也是很重要的成果.下一位有贡献的学者是天文学家瓦拉哈米希拉(Varāhamihira,亦可译作"彘日",约生于505年),他的作品涉及为确定行星位置所必须的计算.他也讲到地球是一个球体;不过,这已是希腊人得到同一发现几百年之后的事了.

公元7世纪,印度又出现了一位杰出的数学家婆罗摩笈多

① "悉檀多"是音译,原是佛教中"因明"的术语,"因明"相当于现代的逻辑学和认识论的学问.Siddhāntas的大意是"论题".——译注

(Brahmagupta,约 628 年),他在下述领域均做出了贡献:数列或级数,利率,几何面积与体积的度量,以及用于天文计算的代数.[3]不过,他对零和负数的研究特别重要:他写出了用负数和零进行计算的全部规则.历史书经常忽略或曲解婆罗摩笈多在负数方面的贡献.在他之前,有的数学家可能已想当然地认为负数存在,甚至找出了一些相应的运算规则,但是,我们还是应该把荣誉归于婆罗摩笈多.包括毕达哥拉斯在内的早期数学家,由于不接受分数和负数而损害了数的概念;而印度人自婆罗摩笈【125】多开始,因接受了这两类数而避免了这种损害.遗憾的是,欧洲人要花费几个世纪的时间才最终接受了负数.

马哈维拉(Mahāvīra,亦可译作"大雄",约 850 年)也接受了负数和零,而且重新陈述了它们的使用规则.最后一位伟大的印度数学家婆什迦罗(Bhāskara,1114—1185)又给出新的说明,把负量当作债务或损失,把正数当作财产.这就为负数增添了一项在今天看来仍然有效的用途.事实上,很可能正是印度数学家把负数看成是债务的想法,促成了负数最终被人们普遍接受.对照一下我们自己的情形,如果能证实一个数学概念有用,我们就会准备去接受它.婆什迦罗甚至把负数当作方程的根或解.尽管当时的印度还没有普遍接受负数,但随着时间的推移,接受它的人越来越多了.

跟零与负数的使用紧密相关的,是印度的数学由不使用符号的修辞代数发展到了一种几乎完全使用符号的代数,它所达到的符号化水平超过了希腊最好的代数学家丢番图.

印度人接受零的历程跟他们使用负数的进程是平行的.但某些权威人士[4]认为,印度人实际上是从希腊人那里学习零的概念的.公元 2 世纪前半叶,希腊数学家、亚历山大的托勒密(Ptolemy of Alexandria)写了一部十三卷本的著作,内容涉及后来成为现代三角学基础的知识.托勒密在他的书中使用"o"来代表缺失的值.他可能是借用了希腊语单词 ouden(意思是"无")

的第一个字母.由此引出了印度人采用了托勒密表示零的符号这一说法,从而引发了印度数学是否受外部影响的问题.

外部影响

印度人到底在多大程度上受外族人,特别是希腊人的影响?[126]到底有多少成果是土生土长的?对于这一问题,不同的学者持有各种各样的见解.例如,我们从维多利亚大学(位于加拿大不列颠哥伦比亚省)的名誉退休教授约翰·麦克利什(John McLeish)那里得知,“没有证据说明希腊人对印度数学有任何影响.”[5]另一方面,我们又知道纽约大学库朗数学科学研究所的名誉退休数学教授莫里斯·克莱因(Moris Kline)的观点:

> 印度数学发展的第二时期(高潮时期),大约从公元前200年到1200年.在这一时期的第一阶段,亚历山大的文明肯定影响了印度人……印度人的几何无疑来自于希腊……[6]

确实,印度人应该知道希腊的存在,因为亚历山大大帝曾征服了波斯帝国,并于公元前327年至前325年间在印度河谷地区征战.因此,希腊学者与印度学者应该有机会交流思想.我们还需要考虑来自巴比伦和中国的影响.尽管很可能有这样那样的影响,但并不能因此贬低印度人的贡献.关于零,现在没有直接的证据说明它源于托勒密学派.回忆一下马雅人在不受外界任何影响的情况下创造了跟印度的零同样的零,这是不无教益的.这些事实使人联想到,把零表示成“o”或一个小圆圈,可能是人脑用符号表示“无”的最自然的方法.

印度—阿拉伯数系

印度人最伟大的贡献其实并不是他们使用了零和负数,而

是创立了与上述贡献具有同样意义的独一无二的数系——它早已在全世界推广使用.这一数系包含四个要素:以十为基底,具有代表数一至数九的特殊符号,位值制表示法和零.这些要素中的每一项单独拿出来都不能说是印度特有的,因为我们在其他的文明中看到过其中的一项或几项(不是全部四项).马雅人有位值制表示法和零两项.希腊人有以十为基底的体系和表示一到九的特殊符号(见诸于爱奥尼亚数系中),但没有位值制和零.【127】所有这些要素的结合赋予了印度数系以独有的高品质.

早在公元前3世纪,表示一到九的一套独特符号就已出现在一些石刻铭文中.[7]这就是所谓的婆罗米(Brahmi)数码,它们尚未演化成我们今天使用的符号,而且也不包含零(图28).最初使用婆罗米数码只是做加法,很像希腊和埃及数码的用法,而且也没有位值的概念.大约在公元600年,婆罗米数码开始采用位值制来计算.这一时期或稍晚一些时候,零也加入进来从而形

	印度的婆罗米数码	西阿拉伯的古柏数码	东阿拉伯数码
1	一	1	١
2	二	2	٢
3	三	3	٣
4	[illegible]	4	٤
5	[illegible]	5	٥
6	[illegible]	6	٦
7	[illegible]	7	٧
8	[illegible]	8	٨
9	[illegible]	9	٩
0			٠

图28 现代印度—阿拉伯数码的前身.左栏是源自印度的婆罗米数码(公元前3世纪),中栏和右栏是两种阿拉伯数码(公元第9世纪).

成了一个完整的体系. 该体系的一个稍加改变的版本被阿拉伯人翻译传抄并传往欧洲.

128] 印度人的主要贡献有两项:一是采用了负数和零,二是把四个互相分离的要素结合在一起从而形成了我们现代的数系. 尽管西方数学家在接受这两项成果时都显得步履缓慢,但这第二项贡献的影响确实巨大. 印度人把负数视为债务从而使负数与日常生活结合成一体,同样具有重大意义.

1300 年以后,印度再没有产生任何伟大的数学家. 直到 20 世纪我们才又遇到一位名叫斯里尼瓦萨·拉马努金(Srinivasa Ramanujan, 1887—1920)的数学天才.

数系传向欧洲

现代数系被称为印度—阿拉伯数系,是因为印度人创立了它而阿拉伯人把它传承下来并将其传入欧洲. 阿拉伯人的作用是抄录下印度手稿并为其他人保存了它们.

公元 7 世纪,先知穆罕默德(The Prophet Muhammad)统一了阿拉伯半岛上处于游牧状态的阿拉伯人. 又用了一个世纪,阿拉伯人打出了一个从印度到北非并包括了西班牙的帝国. 这个庞大的帝国分成以西班牙的科尔多瓦为首都的西部王国,以及于 766 年由哈里发曼苏尔(Caliph Al'Mansur)建立的中心位于巴格达的东部王国.[8]这位哈里发不论其种族和宗教信仰,向一切学者开放巴格达的大门,使巴格达成为一个巨大的学术中心和知识的宝库——特别是收集了希腊的和印度的著作.

有几位阿拉伯数学家翻译了涉及印度数码的印度人的手稿. 穆罕默德·伊本·穆萨·花拉子米(Mohammad ibn Musa al-Khowarizmi)就是其中的一位,他于 830 年写了一本关于印度算术的著作. 阿拉伯人把印度的数变化成了两套数码,一套是所谓的古柏(Gobar 或 Gubar),或称为西阿拉伯数码,另一套是东阿拉伯数码(图 28).

希腊和罗马帝国衰落之后,欧洲的学术研究的火花只是星

星点点，不成气候．从四世纪末到文艺复兴，数学方面没有什么重大的进步．欧洲人一直使用的希腊的爱奥尼亚数码到了10世纪时被罗马数码所取代．商人们使用算盘和算板进行计算．慢慢 [129] 地，这座缺少知识内涵的大厦开始出现裂缝．为了把印度—阿拉伯数系引入欧洲，教皇西尔维斯特二世（Pope Sylvester Ⅱ）在公元10世纪作了第一次尝试，但以失败告终．

采用新的数码不乏好的理由，但也有强大的势力要求保持旧有的罗马数系．印度—阿拉伯数码的主要优点就是它们能方便地用来完成实际的计算．也就是说，无须用算盘和算板，书记员可以写下要算的数，然后就一个个数码做运算，就像我们今天的办法一样进行数的相加、相减或相乘．在旧有的体系中，书记员要拨弄算盘或算板上的小珠子，算完后只能把答案写在纸或用于记录的皮革（亦称皮纸）上．如果只是为了记录那些数，用罗马数码是很合适的．

在纸上写下解决问题的步骤比使用算盘的好处在于，非解题者即使在很长时间后也能够看到答案是怎样得出来的．因此，使用新的数码能让审计者核验计算．这肯定是它的优点，能用于监督欺诈与偷窃行为．当然，把计算过程写下来的一大缺点是耗费纸张，而当时的纸张既昂贵又稀少．欧洲使用的第二种书写介质是用皮革制成的皮纸，它也同样昂贵．换句话说，中世纪的欧洲人没有大量便宜的纸张以供草稿式的书写．书记员广泛使用算盘或算板，以便节省纸张和皮纸，将它们用于计算中最重要的部分，即写下答案．当我们得知欧洲的第一座造纸厂要到1154年才在西班牙建成，而巴格达早在794年就有了造纸厂，纸在数学发展中的重要性就不言而喻了．

下一个试图在中世纪的黑暗时代①将印度—阿拉伯数字引

① 欧洲历史上的黑暗时期，自6世纪至12世纪，亦指自罗马帝国衰亡（476年）至10世纪末．——译注

入欧洲的是杰出的数学家、比萨的莱昂纳多(Leonardo of Pisa,以斐波那契(Fibnacci)的名字闻名于世,约 1180—1250 年).[9]在 1202 年,莱昂纳多写了一本含有新数码的有关计算的著作《算术书》(Liber Abaci).他的这部书作为有关计算的原始资料集沿用了几个世纪.对使用新数码的第二次推动来自巴黎大学的教师约翰内斯·德·萨克罗博斯科(Johannes de Sacrobosco).他于 30】1240 年写了一部关于在计算中使用印度—阿拉伯数码的著作,被广泛延用了好几个世纪.

然而,这些努力并没能说服所有的人都接受这种新符号.那些偏爱算盘的人们顽固地抓住老方法和旧数码不放.他们被称作算盘迷(abacists),而那些希望引入印度数码的人被称为算法家(algorithmicists).[10]在算盘迷与算法家之间的争斗持续了几百年,一直斗到 16 世纪,此时文艺复兴运动早已开始(它始于 13 世纪的意大利).最后,在德国出版了几本教科书,名为《算术教科书》(Rechenbucher),成了标准教本,被广泛采用,终于使算板和算盘败在了笔和纸的手下.当然,此时欧洲人能生产大量的纸张,供不应求已不是什么大问题了.

为什么欧洲会长时间地拒绝印度—阿拉伯数系,这并不能完全用它传入欧洲的最初几个世纪里缺乏纸张来解释.真的,不接受有如此明显优点的数系,确实令人困惑.算板和算盘都以位值制的概念为基础,而且以十为基底的数系也已在欧洲流行.甚至欧洲人口语中说的数都采用位值制.例如,我们用英语说"七千,四百,零九."如果我们把"七"、"四"或"九"这几个字的次序变更一下,我们就得到不同的数."千"和"百"是定位者.无论是口语、算盘还是十进制数系,他们都在推动欧洲人走向位值制数系,但自比萨的莱昂纳多引进该数系直到 16 世纪末,在长达四百年的时间里,欧洲人朝前走的速度相当缓慢,显得十分勉强.

在欧洲接受零和负数的过程跟采用印度—阿拉伯数系同样的缓慢.一些人甚至认为零是魔鬼的创造.[11]负数在 1484 年才

第一次出现在欧洲人写的方程式中，那年巴黎的一位博士尼古拉斯·许凯(Nicolas Chuquet)写了一部关于算术和代数的书. 下面这个等式是他书中使用负数的一个例子：$4.^{1}$ *egaux a* $\bar{m}$. $2.^{0}$. 用我们的记法就是 $4x = -2$. 上方有一短杠的小写 m 代表负号. 相信读者一定注意到了，仅仅五百年前使用的代数符号跟现今的竟有天壤之别！【13】

许凯出版这本书的五年后，即 1489 年，莱比锡的约翰·维德曼(Johann Widman)出版了一本算术著作，其中使用了我们熟悉的加号和减号. 不过，人们普遍接受这些符号还得等待一段时光. 据说最早使用正负号的是那些装运货物的人，用以标明货箱是超重还是重量不足.

在 16 世纪，许多代数学家跟希腊人传下来的只有正数的数系苦苦地周旋着. 这种数系对他们的需要来说实在太狭隘了，每年都有越来越多的人在计算中使用负数，但是否认方程的解可以是负数的呼声依然很高. 这些数学家在字里行间透露了要接受这类奇怪的数的难处. 米凯尔·施蒂费尔(Michael Stifel，约 1487—1567)在方程中用了负数，但却称它们为"荒诞的数".[12]

终于，佛兰德的数学家阿尔贝特·吉拉尔(Albert Girard，1590—1633)在他 1629 年出版的著作《代数新发现》中明确主张：负数和正数具有同等的地位，他接受负数可以作为方程中的数和方程的解(或根). 他甚至提出负数是正数的相反数，这恰是我们在数线上说明负数位置的理由. 经过漫长的历程，负数终于在我们的数的概念中占有了一席之地.

即使到 16 世纪末，负数和零还是没有被所有的人所接受，因为有少许顽固分子就是不接纳这种奇怪的玩意儿. 更有甚者，进入 18 世纪之后，有些教科书仍不讲述两个负数的乘法. 这种过时的毕达哥拉斯学派的思想的最极端的例子，体现在德国数学家利奥波德·克罗内克(Leopold Kronecker，1823—1891)的身上，他时常宣称，"上帝创造了整数，其余的才是人做的工作."[13]

克罗内克确实相信，自然数之外的一切数都应该被赶走，因为把数学奠基于不存在的实体上必将导致矛盾．作为一位著名的数

32] 学家，到了 19 世纪中叶还提出这种观点，看起来让人感到很荒谬，可是它却说明毕达哥拉斯学派的影响已跨越了两千年的时空，减缓了人们的前进的步伐．

回到数的直线

现在我们准备用已发现的数——自然数，分数，负数和零，来完成我们的数线．在图 29 中，我们使用跟在零的右侧配置正数的同样方法，把负数配置在零的左侧．因此，对于每一个正数——分数或整数，我们都有一个跟零等距离的相应的负数，只不过是在零的左边．如果我们考虑所有这些已配置在数线上的数，即正负整数和所有的正负分数，那么我们就得到了全部有理数，即所有可以写成一个自然数被第二个自然数除的形式的数①．人类直到公元 7 世纪才发现了所有的有理数．这项工作最终是印度的婆罗摩笈多完成的，但他和他同时代人的努力被人遗忘了．欧洲人直到 16 世纪末才接受了所有的有理数，不过有些顽固的“毕达哥拉斯分子”硬是把这一论题拖进了 20 世纪．

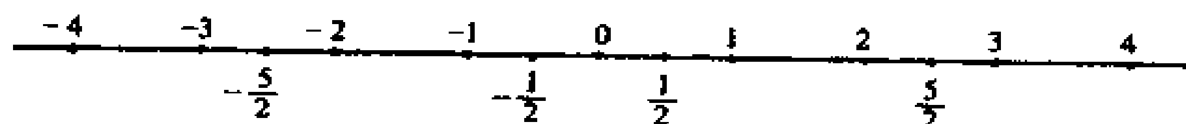


图 29　含正负整数和分数的数的直线．

然而遗憾的是，即便是这个数系仍是不完全的，因为数线上

3] 还含有跟有理数无关的点．故事还得继续往下讲．

---

①　注意，整数也属于有理数是显然的，因为任何整数 N 都可以写成 $\frac{N}{1}$ 的形式．——译注

第8章 [illegible]

不同种类的无穷

任何讨论数的话题，如果完全不涉及无穷，那将是毫无意义的．在探索自然数序列时，我们已经谈到过“无穷”这个术语，不过并未试图去确定它的含义．为了理解自然数是什么，必定会对无穷有点感觉，要理解数必涉及无穷——它们是“无穷无尽”的．因为数学肇始于数的研究，所以，要是不抓住这个奇怪而又美丽的概念，我们就别想去真正认识和欣赏数或是数学．

确实，对无穷的认识是人类最伟大的成就之一．不过，它在社会各阶层的人士中引起了众多的惊愕、焦虑和渴望．无穷这种东西，你无法用心智将它完全兜住，它要往外跑，总是把你丢在后面．一个人要是老在那里来回琢磨无穷，必定会患上智力方面的高处恐怖症（即恐高症）．然而，其他一些人已经接受和采用了无穷这个概念，好像他们相信：一个完全有限的世界会引起幽闭恐怖症．于是，人类一直在担忧被封闭和害怕落入无尽的空间之间摇摆．就单个人对无穷这个概念的反应而言，他或她的心理因素所起的作用，大大超过了任何更重要的对无穷的特性的理解．

自然数引出了无穷，正是它们的演进，最早让我们的祖先感觉到了这个概念．史前的人不知道真正抽象的数，他们不能把所计数的事物跟抽象的数相联系，他们在思考这件事的时 【135】

候，也许以为数是有限的，理由仅仅是他们所计数的对象都是有限的．然而，在遥远的过去的某个时刻，居然有人认识到了数本身能够无止境地继续下去．这不能不说是件了不起的事，令人惊叹！

现在，我们应该摆脱惊讶之情，试着来更好地理解无穷．首先，我们必须区分两种类型的无穷：可能存在于宇宙之中的无穷——即物质的无穷，以及属于纯智力范围的无穷——即思维中的无穷．实际上，我们所要做的是去区分有形的世界和概念的世界．之所以要做这件事，理由很简单：物质的无穷和思维中的无穷有着各自不同的特点，需要不同的研究方法．为了研究物质的无穷，我们使用经验主义的方法，即，必须迈进宇宙去观察．这种方法处于现代科学方法的核心．当我们的推理与我们的感知不符时，我们会重新去设计我们的推理．这种方法显然是非希腊的，因为希腊人认为有关宇宙的真实的知识，都能从那些最基本的原理推导出来，他们把通过感官获得的信息只看成一种认知，它们并不值得贴上真理的标签．

另一方面，思维中的无穷必定能够通过演绎逻辑而非经验来理解．思维的对象是按逻辑行事的．因此，希腊的方法，即演绎推理，很适于研究我们头脑中有关无穷的概念．历史上，发生在数学内部的最伟大的奋斗之一，是去构建一种令人满意的，能用于研究无穷的逻辑，人们直到 19 世纪末才大功告成．

第二个需要加以区分的概念是无穷大和无穷小．大多数人在思考无穷时，倾向于往大的方面考虑．但是，这个概念涉及两个方向，朝向大的和小的两种方向的无穷分别引出了宇宙论和逻辑学的问题．朝向“大”的方向的问题称为无穷大量问题，朝向“小”的方向的问题是所谓的无限可分性或连续性问题．为了回顾这些问题的历史，我们将花费相当多的时间去考察古希腊人，

[96] 他们发现了许多与无穷相伴而生的困难，而为了弄清它们又身陷泥沼、不能自拔．后来的大部分思想家也都采用了希腊人关于

无穷的定义和看法,结果同样陷入了无法脱身的困境.

无 穷 大 量

仅仅依赖现实中的物质世界,我们实际上并不能得到无穷大量是否存在的知识.宇宙是无穷大的吗?我们并不知道."宇宙怎么可能是有限的呢?"患幽闭恐惧症的人会说,"它必定永无止境,因为如果我们来到尽头,那另一边又是什么呢?"

对此,患恐高症的人回应道:"也许宇宙又折叠回到它自己身上.也许它是那种无边界的有限."

但是,幽闭恐惧症患者并不罢休:"那是不可能的.你无法去想像一个无边界的有限宇宙,所以它根本不存在."

我们还可以就时间的无穷大量编造类似的争论.宇宙怎么会终止其存在呢?它必定会永存吗?到底时间是永恒存在的,还是像大爆炸理论所说的有个起点呢?

争论就这样反反复复地进行着,每一方都利用精心选择的逻辑来阐释他们的观点.在这类争论中经常出现一个共同的话题,就是诘问对方是否能去"想像"某个概念.这里的"想像",发问者通常意指一种能力,一种在心里、在脑子里想清楚某个概念的能力.你能在心里想像宇宙永恒的连续的延伸吗?你能在脑子里想像宇宙到达一个并无边界的尽头吗?提这种问题实际上蕴涵了一个前提,即为了让某个事物存在,人们必须有能力去想像它,对于那些最难对付的事物,我们能用"心中的(内在的)眼睛"去"看"它.太怪了吧.这种奇特的论证会导出奇怪的结论,因为它是暗含着在说:在任何生灵聪明到能去想像一个更大的宇宙之前,这种宇宙并不存在.于是,当我们的祖先进化到足够聪明,以至能去观察星星并琢磨星空之外是什么的时候,宇宙好像靠魔法一下就存在于世了.无论如何,这种论证并不可信,终究物质事物的存在并不依赖于人是否能够去想像它们. 【137】

靠思维来支撑现实这种想法还有另一层蕴意:存在着无所

不知的精神力量(mind),它在对宇宙进行着永不停息的思考(想像),从而使宇宙得以继续存在.然而,这并不意味着数量有限的人可以靠着他们的思维得出有形的物质对象存在的结论.因此,物质世界的某个对象是否存在,跟我们是能还是不能去想像它毫无关系.存在就是存在,不存在就是不存在,跟我们无关.我们必须小心地避免提出这样的要求:用心中的眼睛去"看"正在讨论的事物,去思考我们无法从整体上加以想像的概念.

对所有这些带哲学味道的问题,我们的结论是:我们不能确定是否存在任何一种有形的物质的无穷大量.我们确实不知道.这并不是件坏事.它给我们打开了一扇思索的大门,围绕它展开的种种思考,允许我们用各种不同的、十分有趣的方法去想像现实中的实体.

希腊人最早给我们留下了关于无穷的有价值的学术传统.希腊人表述无穷所用的词是:*apeiron*.我们将看到,无穷在希腊的宇宙论中常常成为引发争论的动力.第一批涉及无穷这个概念的文献中,有一篇出自希罗斯的菲勒塞德斯(Pherecydes of Syros,公元前7世纪或前6世纪)之手,他说:"宙斯和时间一直存在着……"[1]这表明菲勒塞德斯相信时间的尺度是无穷的.米利都的阿那克西曼德(约公元前560年)也谈到过无穷的时间."这(不管它是什么——反正是一种非有限的本质特征)是永恒不朽的."[2]

亚里士多德是古希腊时代对无穷进行了最广泛的研究的学者(图30).他的《物理学》的第三卷几乎全部用来阐述无穷这一概念.亚里士多德批评柏拉图,也批评毕达哥拉斯学派,因为他们相信无穷是独立存在的实体(或者说本体),而不是其他事物的属性.亚里士多德不接受无穷本身是一种实体而非其他现存实体的属性的观点.亚里士多德也认识到无穷有着不同的应用:无穷的时间,无穷大量和无限可分性.不过亚里士多德拒绝了无穷大量.

“我们(作为物理学家)的质询限制在有关它的一个特殊的论题上,即意识的对象问题,我们必须要问这些对象中存不存在这样的本体,它从增大的角度看是无穷的.我们可以使用辩证的论证方法,说明并不存在这样的对象.”3) 【138



图 30 亚里士多德,公元前 384 年—前 322 年.(布朗兄弟出版社,斯特灵市,宾夕法尼亚州)

对无穷大的种种见解

我们已经讨论了物质的无穷扩展,或者说是物质世界中的无穷.那么,作为抽象的思维对象,它在概念世界中的情形又如何呢? 存在抽象的无穷吗? 其实,我们此时的立足点更稳固了,并且能够作出肯定的回答.是的,我们确实有涉及这种无穷的概念.事实上,这里有一个最好的例子,它在患恐高症的人中引起【139】

的惊恐最少．那就是自然数的概念．自然数是没有穷尽的．它也正好属于我们讨论的范畴，我们的目的本来就是为了去理解数，而数作为一个汇集是无穷的．

让我们稍微讨论一下在自然数中发现的各种无穷大的概念．人们可以按不同的方式来想像整数．我在孩提时代曾以为每个人都用跟我一样的方式“看”到了它们：即数“1”是核心，“2”在它右边但离开一小段距离（这样，就不至于把 1 和 2 跟数“12”相混淆），接着，数“3”在“2”的右边，依此类推．自然数向我的右边扩展，直到它们消失在雾霭中．然后，我问妈妈她是怎么看自然数的．“它们以数 1 打头，”她这样解释说，“然后以绕弯的形式打着转往下走，变得越来越大．”当时我吃了一惊．这个例子只是告诉你，由于经历和所受的训练各异，不同的人是以不同的方式去想像数的．

大多数人可能都“在心里”把自然数“图象”化，以数 1 为开端，然后一个个往前排上半打或者更多的数，最后它们消失在我们的内视力所及的范围之外．总之我们并没有“看到”无穷多的数．我们怎么知道存在着无穷多的数呢？这是因为对于我们能够去想像的某个最大的数，再往上加 1 就能引出一个比它还大的数．因此，我们所谓的某个最大的数根本不是最大的．于是我们便认识到：并不存在最大的数——它们能永无止境地向更大的方向迈进．这段不起眼的论证，代表了我们的全部思想，用的是一种很普通的逻辑方法，即所谓的反证法（间接证明法），前面我们说过这是希腊人最喜爱的方法．

好，现在我们有了自然数，它们是无穷的．不过，这里“无穷的”到底指什么含义呢？它是指不存在最大的自然数，即自然数是无界的．这一点很重要．在这里，我们就是在这一含义下使用无穷的：无穷大本身不是一个数，它只是所有自然数构成的集合的一种性质．

长期以来，从希腊人到 19 世纪的（甚至今天的某些）思

想家一直为数的无穷性所困扰．他们无法一下子“看到”所有的自然数，所以他们觉得，所有那些无法想像的数比起我们每天使用的那些比较小的数而言，其存在的可能性的要小．这是古代毕达哥拉斯学派的人考虑问题的路子．他们不喜欢自然数的无穷性，而是取前十个数作为其余所有数的基础，这里的10具有特别神圣的作用．塔兰托的菲洛劳斯是公元前5世纪下半叶的毕达哥拉斯学派的成员，据说他影响了柏拉图的哲学．他曾表述过毕达哥拉斯学派的思想：一至十在数的生成中有特殊的作用． 【140

> “你必须依据存在于十(Ten-ness)内的活力来研究‘数’的行为与本质；因为它(指1至10)是伟大的，完全的，包罗一切的，并且是神和人的生命及其向导的源泉；它享有……［句子在此中断］．也就是说这活力是属于1至10的，无此活力，所有的事情都将是不定的，难解的和难识别的．”[4)]

这一信念表达了这样的意思：比10大的数都是在模仿从1到10的数，它们的存在归因于前10个数的重复．因此，当从1到10这些数自身重复有限多次就产生出更大一些的数．这里不存在数的无穷性．

柏拉图也利用这样的想法：有关“十”的那个原理起着限制出现无穷多的数的作用．“……在增大的方向上并非是无限上升，因为作为构件的数仅上升到10．”[5)]

亚里士多德同样也拒绝存在无穷多个数的观念．“数不能抽象地被取成是无穷的，因为数或有数目的东西是可以去数和计数的．”[6)]不过亚里士多德相当聪明，他认识到要是绝对地拒绝一切形式的无穷，可能会使他的哲学变得十分笨拙．为了避免笨拙，他发明了一种小花样．他说无穷不是“实在的”而只是“潜在

的".因此,他拒绝承认无穷具有完全彻底的存在性,但又让无穷的概念保持一定的活力.

> "因为,一般而论,无穷以如下的方式存在:一物之后总有另一物存在,所达到的每物永远是有限的而且总是不同的……于是,无穷没有别的存在方式,只可能以潜在的和还原的方式存在."[7]

亚里士多德承认自然数总可以越加越大,但是他又宣称:这【41】并非是无穷大.

无限可分性

希腊人还为下述问题所困扰:空间是否无限可分.由此引起他们对运动和空间的连续性的困惑.由埃利亚的巴门尼德(Parmenider,约公元前475年)开创的埃利亚学派,跟毕达哥拉斯学派的意见相左.后者认为空间由不可分的线段组成.埃利亚学派的成员不仅指出不可分线段的概念会引出矛盾,他们还提出由无穷多个点组成空间的观念所引出的种种问题.

巴门尼德的形而上学提供了一个反映希腊人愿望的完美例证,他们排斥感官的知觉而喜好推理.巴门尼德论证道:因为不能无中生有,所以不管什么东西,它就是那个玩意儿,而且永远不变,存在(Being)就是"同一"(始终如一),就是没有变化.由此可以导出一个著名结论:运动只是一种幻景,因为真正的存在之物不会改变.然而,对数学产生实质性影响的并非巴门尼德和他著名的"同一"论哲学,而是他的学生,埃利亚的芝诺(Zeno of Elea,约公元前450年)(图31).芝诺给出了几个论证,按埃利亚学派的逻辑展示了世界不可能具有事物的多样性,也不可能是变化的,以此来反对毕达哥拉斯学派关于数(单子,monad)和能在空间中运动的量的学说.他最著名的论证被亚里士多德重述

为阿其里斯(Achilles)和乌龟的故事.

"第二个[论证]是所谓的'阿其里斯追赶乌龟说',故事说的是在一场比赛中,最快的赛跑者决不可能追上跑得最慢的家伙,因为追赶者必须首先到达被追赶者的出发地点,所以慢者总能保持领先的位置.这种论证本质上跟二等分说的论证相同……"[8]



图 31 埃利亚的芝诺,公元前 489 年—?.(Culver Pictures,纽约,纽约州)

简单地讲,芝诺关于二等分说的论证认为,运动是不可能发生的,因为一个物体必须首先到达离终极目标一半距离处的点.但是,在此之前为了到达这一点,它又必须先到达离这点一半距离处的另一点.因此,它永远不可能动起来.芝诺在这里假定了赛跑开始与结束的两点之间的距离可以被细分无穷多

[142] 次、而一个物体在有限的时间内不可能穿越无穷多个点．这一无限可分性的概念是无穷小思想的核心．我们可以利用数的直线和该直线上所有我们能鉴别的点来看清楚这一概念．

图 32 画出了数的直线上零和一之间的部分．我们将稍稍改变细分的过程，经过一段段越来越小的线段从零到达一．以零为起点，我们必须先到达二分之一处的点，接着，我们必须经过一小段距离到达四分之三处的点，下一个中点位于八分之七处．从逻辑上说，这一过程可以往下进行无穷多步．在有限步内我们绝

[143] 对到不了一，因为在它前面总还有一小段路要走．为了真正到达

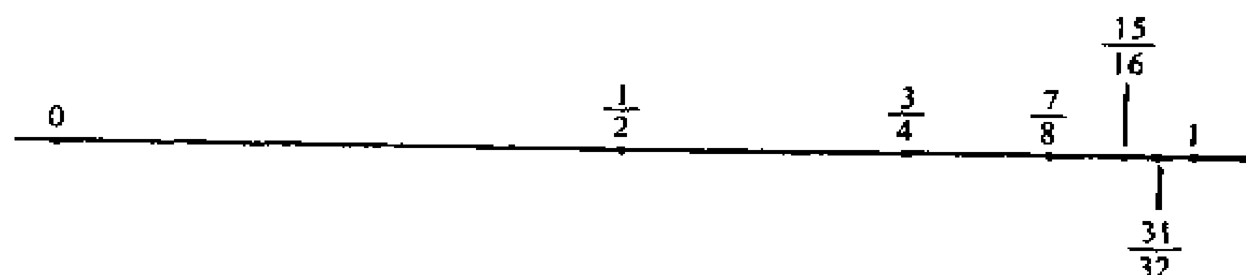


图 32　从0到1要经过无穷多个点．

"一"（我们知道在物质世界中是做得到的——即我们总能从一个地方到达另一个地方），我们必须穿过无穷多个点．这让希腊人感到头痛，也使以后的大多数数学家迷惑不解．为这种事情左右为难似乎有点愚蠢，因为我们环顾四周，看到各种物体都在运动．可是这正好促使我们自问物体为什么能动起来，芝诺论证的意义何在！如果点没有大小，那么我们可以把无穷多个点塞进一个我们要它多小就可以多小的空间．一个物体为了能动起来，它必须在某个时间内占据这无穷多个点中的每一个点．但是，即使如此，也还不足以到达任意确定的点：因为若点无大小，那么，单单穿过一个无穷的点集仍不能保证运动得以进行．正是这一困难让希腊人和后来的哲学家们在讨论运动及其位置的问题时感到迷惑．

对无限可分性感到担忧的根源在于，我们想像在零和一之间

挤进了无穷多个点.事实上,图32中的那些点的主要"份量"①都挤在"一"旁边.怎么挤得下呢?别忘了,点既无长度和宽度,亦无高度,它们不占据任何空间.所以,无穷多个点并不真的占据从零到一的直线上的任何空间.然而,在我们的"感觉"中直线是由点组成的,这往往使我们拒绝接受无穷个点的想法.当然,此时我们仍面临两个问题:物质空间能够无限细分吗?概念空间能够无限细分吗?

很多希腊哲学家,包括毕达哥拉斯的信徒,谈论过物质世界是由无限多的元素或要素跟其他东西混合而成的.理想主义之父柏拉图以其追求完美和不变的概念著称于世.但是,他也追随毕达哥拉斯学派的传统,在他的宇宙论中使用了无限可分的空间.在他的著作《蒂迈乌斯篇》(Timeaus)中,柏拉图讲到了宇宙的来历: [144

> "他让她(世界的化身)既是……不可分的和不变的[理念的世界],又是可分的,而且必须与物质实体相关……那即是空间,它是永存的,不会毁灭并为所有被创造的事物提供家园."[9]

柏拉图也称空间是一个"发展过程的容器",因为它以某种神秘的方式跟各种形式或概念结合而生成可觉察到的世界.这种结合必定是神秘的,因为柏拉图坚持认为形式本身决不会具体地进入物质世界.毕达哥拉斯学派的成员将有限物(数)与无限物相结合以创造他们的宇宙.在他们看来,数就像微小的粒子,是不可分的,而无限物就是混沌的空间,是无限可分的.这种无限物以某种神秘的方式从单子("一")中分离出其他数从而产生物质的事物.受毕达哥拉斯学派的影响,柏拉图将这种思想和

① 指绝大部分点.——译注

发展过程的容器(即空间)结合在一起,由此产生整个世界.无论是毕达哥拉斯的无限物还是柏拉图的容器都具有负面的内涵.对于这两位学者而言,他们的观点的精髓在于那些相反的要素,即有限物和概念.在柏拉图看来,概念(即形式)是完美的,不可分的,而容器是无限可分的.柏拉图并不喜欢可分性原理,可是他的宇宙论需要用到它,所以他只在《蒂迈乌斯篇》中讨论过这一原理.他在不得已的情况下接受了无限可分性和关于时间的无穷大量,但他不能再让自己去接受关于空间的无穷大量或空间的无限延展性了.

对于亚里士多德,无限可分性比无穷大量更难对付.提到无穷大量时亚里士多德说过,无限可分性只能潜在地去完成,而不能具体地去实现.伦道夫一麦肯女子学院的前数学教授鲁迪·拉克(Rudy Rucker)指出(参见他的优秀作品《无穷与心智》[10]),亚里士多德在实无穷和潜无穷之间做出的区分"未必有用",因为实际上他只是捏造了第二种实体以让他的无穷有个栖身之地.

45] 在概念的世界里,自然数从逻辑上就蕴涵了无穷多个概念.把它们的无限性说成是"潜在的"而非"真实的",实际上无助于我们对于数的理解.

无穷大换成无穷小

有一些希腊人不愿意接受无穷是可以理解的,因为用我们心智的"眼睛"很难"看"到所有的自然数.当我们尝试着去看更多的数时,它们却逃出你的视野跑向远方(向我们右方跑走);无论我们怎么卖力地去看,这些数总能跑出去——超过木星、冥王星,跑出太阳系.为了看清自然数的无穷性,我们要利用数线和一些射影几何[参见本书附录"名词解释"部分的相关条目]的知识.图 33 的下部是一条数线,上面标出了零和从 1 到 10 的自然数.零的正上方有一个圆,经过零和自然数分别向圆上代表北极的点引直线,我们就把自然数投影到了圆上.这时,这些直线与

圆的交点就成了自然数在圆上的对应点. 从最初几个自然数的投影情况看, 在圆上的自然数的投影将不断地往上靠向北极.

然而, 不论我们在数线上向右走多远, 所引直线与圆的交点绝对到不了北极. 要想让一个自然数投影到北极, 除非从它引出的直线与数线平行; 可是经过所有自然数引出的直线都是从数线出发的, 所以这是办不到的. 因此, 自然数投影到圆上的点, 只可能越来越接近北极而永远达不到它. 事实上, 可以想像所有的自然数都投影到了圆上, 此时我们得到无穷多个点, 越到圆的上部它们越密集. 我们要是有一个放大镜, 不妨仔细看一下圆的顶部. 我们将看到有非常多的代表数的点挤向北极点, 相邻点之间 【146】 的圆弧的长度越来越短. 这个点的汇集非常像芝诺为否定运动的存在而设计的无穷点集.

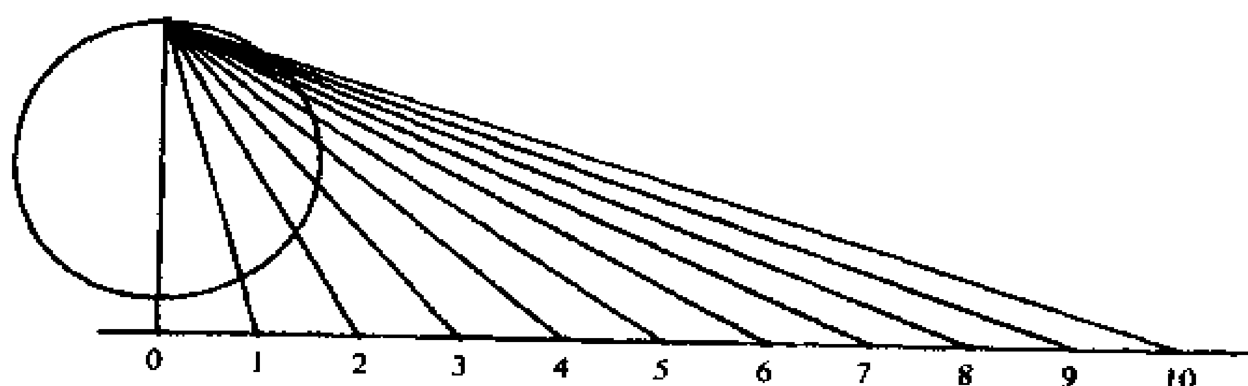


图 33 无限的自然数在圆上的投影.

我们上面的做法只是耍了个花招, 一种小小的骗术. 因为我们并没有构造出一种方法能让大家"看到"无穷多个点. 这是不可能做到的. 我们所做的只是把无限长的数线投影成有限的弧, 使得那些代表数的点集中到一段有限的弧上. 无论如何, 我们至少可以指着一个圆告诉你, 无穷多个自然数可以由有限的空间中的一个点集来表示. 简言之, 我们把朝向大的方向的无限(无穷长的数线)换成了朝向小的方向的无限(有限线段的无限可分

性）.

陷入泥沼

由无穷引出的各种问题，古希腊人没有办法说服自己去相信它们.不过，无穷这个概念对于数学，特别是对于数论，过去是现在仍然是最基本的.亚里士多德建立了一个研究无穷的舞台：那里没有具体的、可达到的无穷，有的只是潜在的无穷.其后的数学家和哲学家只能在这个奇怪的"潜在的"概念舞台上尽其所能地摆弄无穷.西方宗教中的上帝是唯一的例外：上帝必定是无限的——这不成问题，因为不能期待凡人去理解上帝.

147】

无穷这个问题——涉及无穷大量、无限可分性、运动和连续性，自亚里士多德时代起一直困扰着西方的思想家，直到二十二个世纪后的19世纪.在这漫长的岁月里，多少天才和智者(无论男女)力图去理解无穷，可它一直是个谜.下述引文告诉我们，两千多年来多少最优秀的人物陷进了"无穷"这片泥沼.

一位英国早期的经验主义者托马斯·霍布斯(Thomas Hobbes，1588—1679)放弃了无穷这一概念，因为他说我们不可能进行无限的思维：

> **无穷**是我们可以去任意想像的东西.因此，不存在我们可以称之为**无穷**的概念或思想.没有人能让他头脑中出现无穷大量的形象，也不能去想像无限快，无穷的时间，无限的力量，或者无限的权力.[11)]

他的论证方法在前面提到过：只要某物是我们无法去想像的，那么它就不存在.此时所依据的道理是：关于"无穷"的思想本身必须是个无穷的过程.霍布斯的一些言论还体现了他受芝诺悖论的影响，把运动和连续性这两个概念搅合在一起.

运动是连续地离开一个位置而到达另一个位置……我之所以说是连续地离开，因为任何物体，无论它多么小，都不可能在瞬间整体地从它原来的位置到达另一位置，情况恰恰是它的某个部分会先到达它所离开和到达的两个位置的公共部分的某处.[12]

法国人勒内·笛卡儿(1596—1650)是第一流的哲学家和数学家.他的名言"我思故我在"几乎家喻户晓.他想建立一门奠基于最基本的原理之上的理性科学，它应该很像欧几里得建立的数学中的几何学.笛卡儿的理性主义表明，他本人仍未摆脱希腊演绎科学的方法的羁绊.他利用无穷做出的最有趣的论证是"上帝的存在性".笛卡儿认为，因为他是一种有限的实在，所以只能产生有限的概念.但是他确实具有无穷这一概念，那必定是某个 [148] 无限的实在赋予了他这个概念.因此一定是上帝这一无限的实在把无穷的概念植入了笛卡儿的思想.

于是，根据我过去所说的一切，只能得出上帝存在的结论：尽管我思想中关于实体的概念应得出我本人是个实体.然而既然我是个有限的实体，就不应该有关于无穷实体的概念，除非有某个真正无穷的实体给了我这个概念.[13]

在解开无穷之谜的路上，笛卡儿并不孤立.卡尔·弗里德里希·高斯(Carl Friedrich Gauss, 1777—1855)——被大多数数学家誉为历史上最伟大的三位数学家之一，也未能摆脱对无穷的偏见.他在给一位同事的信中写道：

关于你的证明，我必须毫不客气地反对你使用作为完

成了的事物的无穷①,这绝不允许在数学中出现.无穷只是一种形象的说法……[14]

因此,进入19世纪之后,一些最杰出的人物仍在躲避无穷.甚至20世纪的数学巨人之一库特·哥德尔(Kurt Gödel)也面对点的无穷集所构成空间自思而不得其解."按这种把所有的点加在一起的直观的概念,我们还是不能得到整条直线;这些点构成的只是直线的某种骨架."[15]

穷竭法和极限

虽然希腊人以及追随他们的众多数学家都在无穷面前畏缩不前,但是某些问题确实需要用到无穷.大家知道,求一个正方形的面积就是求其边长的平方,这对希腊人和他们之前的文明人来说是件容易的事.求矩形面积也一样方便.对于三角形也只要用几条简单的计算法则便可了事.原因是这些几何图形的边都是直线.圆的情形怎么样? 圆上处处都是弯的,你该如何去计算其面积呢?

[149] 对于求曲线围成的面积,希腊人研究出了一种方法——穷竭法,它显露了现代微积分的苗头.请看图34(a),其中有一个正方形,它的四个顶点位于一个圆上.显然,圆的面积比正方形的大.诚然,我们可以把该正方形的面积当作圆面积的第一次估值.不妨假设该圆的直径为1个单位长(1英尺或1厘米等等).现在的问题是:用这个正方形的面积作为该圆的面积时误差有多大? 圆面积等于πr^2,即π乘以圆的半径的平方.此时,半径是0.5(因为直径是1).因此我们可近似地得到圆面积为$(3.1416)\cdot(0.5)^2=0.7854$.因为圆的直径等于正方形的对角线,根据毕达哥拉斯定理能算出正方形一边的长度,从而算出其

① 即现在所谓的实无穷,而非潜无穷.——译注

面积.据毕氏定理,$a^2+a^2=1^2$ 或 $a^2=0.5$,此即正方形的面积.因此该正方形的面积 0.5 跟 0.7854 还相差不少.

我们能做得更好些.注意图 34(a)中属于圆的四块弓形不在正方形内,嵌在弓形中的三角形占了弓形区域的一大部分,我 [150] 们把这些三角形区域加到正方形上.图 34(b)就是这么做的,现在来算每个三角形的面积:

$$\text{三角形的面积}=\frac{1}{2}(2r-a)\left(\frac{1}{2}a\right)=\frac{1}{2}a\left(r-\frac{1}{2}a\right).$$

用 4 乘上式可得:

$$\text{四个三角形的面积}=a(2r-a),$$

$$\text{或 面积}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0.207\,1.$$

将上述结果加到 0.5(正方形的面积)上,我们得到新的估值 = 0.707 1.这个估值比原来的 0.5 大大地靠近了 0.785 4.再看图 34(b),圆的外圈有八个小弓形在估值时还没考虑在内.我们可以如法炮制算出相应的面积,加到原估值上,从而得到更靠近圆面积真值的又一个估值.可是,这种做法无论重复多少次,只要是有限次,我们就永远达不到圆面积的准确值,因为总会有小的弓形未被考虑在内.希腊人发明的这种方法我们称之为穷竭法,

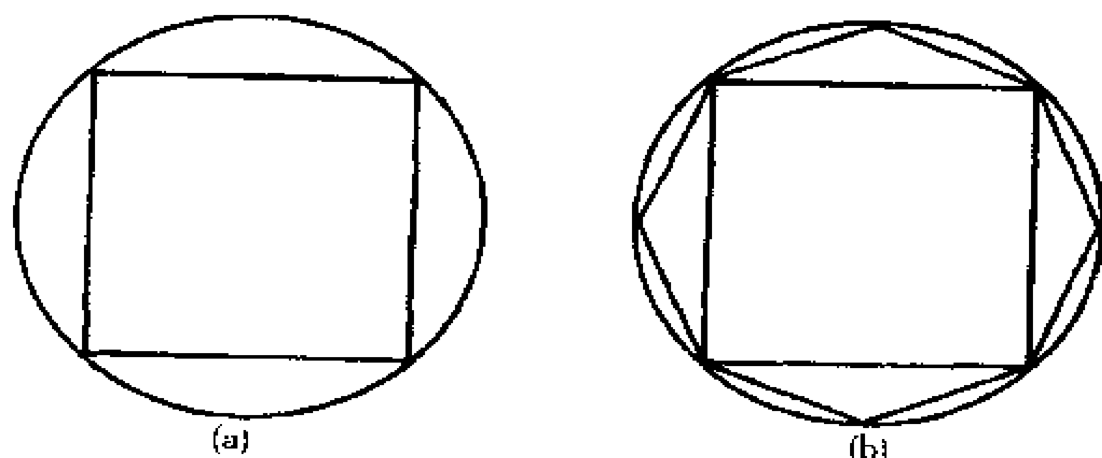


图 34 求圆面积的穷竭法.在(a)中用正方形的密集来估算圆的密集是很不准确的;在(b)中用加上四个三角形后的面积估值就准确多了.

用于求曲边图形的面积或体积.欧几里得的《几何原本》给出了一种严格的处理方式,不过一般认为那是欧多克索斯(Eudoxus)在较早的时候创立的.

欧几里得给出的一个命题陈述了穷竭法.

> 从任一量中减去不小于其半的部分,再从所余量中减去不小于它的一半的部分,继续这一相减的过程直至最后,则将留下一个比任何事先指定的量都小的同类的量.[16)]

这一命题告诉我们:如果每次估值与面积的真值间的误差,都起码减小了我们所画的新的一组三角形面积的一半,那么最终我们能让误差要多小就多小.这种越来越逼近我们想要求的值的想法,仍是现代极限理论的核心,也是微积分学的基础.此外,极限理论对于在数线上定义新一类的数起着关键的作用.

[151] 为了理解极限,我们需要用到一些简单的定义.首先,我们来定义数的序列(亦可称为数列),它是一类特殊的数的汇集.

定义: 称一组数 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 构成一个数的序列,如果这些数被排成确定的顺序.

例如:2,3,6,8 就构成一个项数有限的序列.但我们真正感兴趣的是有无限多项的序列.

定义: 称一个数的序列是无限的,如果该序列的每一项都有一个后继项.

自然数序列是最明显的一个无穷序列:1,2,3,4,5,6,….如前所述,这里右边的三个点表示该序列是无限的.我们按一条简单的规则来构作自然数序列中的每一个后继项,即只要加上数1.要是自问自然数序列中的项能变得多大,我们当然知道它能一直往大里变,没有尽头.

然而,有些无穷序列的项不会超过某个固定的常数.例如,

序列$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots$中的任何一项都不会变得比 1 大. 当我们写出这个序列第 n 项的公式①$\frac{2^n-1}{2^n}$后,上述结论就一目了然了. 这个公式表明它的分子永远比分母小. 因此,该序列中决不会出现一个项恰好等于 1,或存在一个项大于 1. 由于这个序列中的项的大小不会趋于无穷,我们就说它是有界的——即不管序列变得有多长,其中的项的值都是有限的. 事实上,对于上述这个特殊的序列,我们还可以说数 1 及所有比 1 大的数都是它的界,序列中没有一项会比这些界大.

现在,我们已做好充分的准备来回答数学中最基本的一个问题了. 当我们考虑序列的所有的界时,其中是否存在一个最小的界? 是否有一个界小于其他所有的界,而它又大于序列中的任何一项? 对于序列$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \cdots$,回答是肯定的,因为 1 恰 [152] 好是那个最小的界. 我们称 1 是该序列的极限. 当我们任选一个小于 1$\left(但是大于\frac{1}{2}\right)$的数,那么我们总能找到序列中的一项比这个数大. 极限概念是搭建高等数学大厦的最基本的积木. 学习科学与数学的大学生在学习更高深的数学之前,必须先修微积分课,而在微积分课上首先学的就是极限.

为了充分认识极限概念,我们必须理解所谓的极限是最小的界这层含义. 说一个数 L 是某序列的极限,意指该序列将越来越接近 L 但并不达到它. 事实上,当我们任取一个非常小的数 ϵ,那么,我们总能在序列中找到一项,它跟 L 的差小于 ϵ. 现在可以给极限一个正式的定义了.

定义: 称序列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 的极限是 L,如果对任给的正值 ϵ,存在一个数 N 使得对所有的 $n > N$,有

---

① 可称为通项公式.——译注

$L-A_n$ 的绝对值 $<\varepsilon$.

如果你不熟悉数学中的定义，上述说法多少有点别扭和绕弯子．不过它的基本概念不难理解，而它又处于现代数学分析理论的中心地位．我们可以用更简单的术语重述上面的定义：A_1，A_2，A_3 等等这些数的值越来越接近 L 的值．例如，如果我们选定一个非常小的值，譬如 ε，那么我们一定能找出序列中的一项，比如第 N 项，使得第 N 项之后的每一项都更接近于 L，其差小于 $L-\varepsilon$．我们用图来说明这一点(参见图 35)．我们考虑的序列仍是$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{15}{16}$，…，其中的项越来越接近 1．如果你取一个小的数 ε，比如说它等于$\frac{1}{10\,000}$，那么我们能在该序列中找到一项，使得在它之后的项比$\left(1-\frac{1}{10\,000}\right)$更接近 1．这是哪一项呢？从 2^2 起连续地取 2 的更高的幂次，我们发现 $2^{14}=16\,384$．因此，序列中的第 14 项为$\frac{16\,383}{16\,384}$．这个分数十分接近 1．事实上，它比 $1-\frac{1}{10\,000}$$\left(\text{它等于分数}\frac{9\,999}{10\,000}\text{，即 } L-\varepsilon\right)$更接近 1．由此还可导出第 14 项之后的项都以比 ε（一个小的误差）更小的误差接近
153】 1．现在我们知道，无论选的 ε 多么小，总能够在序列中选出一项，使它跟我们的极限 1 的差小于 ε．这就满足了任意接近 1 的

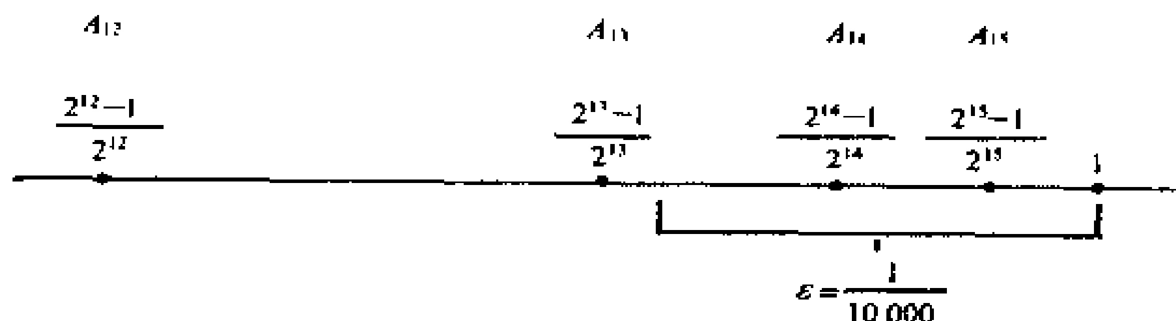


图 35 求极限点．即使取很小的 $\varepsilon=\frac{1}{10\,000}$，我们发现从序列的项 A_{14} 开始，其后的项跟 1 之间的距离都小于 ε．

要求.就这个具体的序列而言,我们做到了不断地接近 1(芝诺悖论说的就是这回事)而并不真正达到 1.事实上,这个序列中没有一项会达到或超过 1.所以,我们说这个序列收敛到 1.

定义: *有极限的序列是收敛的,否则就是不收敛的(或者说是发散的).*

在极限的定义中,我们使用了($L-\epsilon$)的绝对值的说法,这是为了适应可以从两个方向趋近我们的极限.例如,序列$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots$是从小到大趋于 1(即所有的项的值都小于 1).序列$\frac{3}{2},\frac{5}{4},\frac{9}{8},\frac{17}{16},\cdots$是由大到小趋于 1.有的序列具有不满足我们的定义的极限.例如,序列$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{7}{8},\frac{1}{16},\frac{15}{16},\cdots$有两个极限(有时称为聚点),因为序列中相间隔的项分别收敛到 0 和 1[①].我们采用的简单的极限定义,把这种情形排除在外了.

我们用下列方式表示一个序列的极限是 L:

$$\lim_{n\to\infty}(A_n)=L$$

其中的符号"lim"代表极限(limit),极限符号下面的 $n\to\infty$ 表示项数 n 无限地增加.A_n 是所讨论的序列的缩写.这公式表示当项数趋于无穷时该序列的极限为 L.要是序列发散,我们用下式表示: 【154】

$$\lim_{n\to\infty}(A_n)=\infty.$$

这是说序列中的项将无限制地增大.

再举历史上留下的一个序列的例子,说明一个数学问题能让数学家迷恋达千年之久.大家还记得前面提到过比萨的莱昂

① 作者在这里指的是相间隔的项构成的两个序列$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots$和$\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots$,它们分别收敛到 1 和 0.——译注

纳多吧.他的《算术书》把印度—阿拉伯数码引入了欧洲,那是1202年的事.他的另一个名字是斐波那契,他发现的一个迷人的数列就以这个名字命名.这个数列很简单:1,1,2,3,5,8,13,21,….斐波那契序列中的每一项都是位于它前面的两项之和.当然,该序列是发散的,我们用它的极限等于无穷来表示:

$$\lim_{n\to\infty}(1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots)=\infty.$$

我们可以利用斐波那契序列中相邻的项作成的分数来构成另一个序列,即$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\cdots$.注意,其中的每一项都由斐波那契序列中相邻项组成,而让两项中较大的项作为分子.这个序列收敛得很好.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\cdots\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

我们不是古希腊数学家或建筑师,所以不会一下子看出等号右边的那个极限有多丰富的含义.$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$这个值被古希腊人称为黄金分割或黄金比,并赋予它专门的符号ϕ.希腊人因为没有分数,所以认为这个值是两个长度的比,即长度($\sqrt{5}+1$)和长度2的比.图36画的是直角边长为1和2的直角三角形.根据毕达哥拉斯定理,它的斜边等于$\sqrt{5}$.因此,当我们用斜边($\sqrt{5}$)与短[155]直角边(1)的和除以长直角边(即2),便得到$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$或黄金分割.希腊人知道一个矩形当长边为$\sqrt{5}+1$, 短边为2时看起来很美

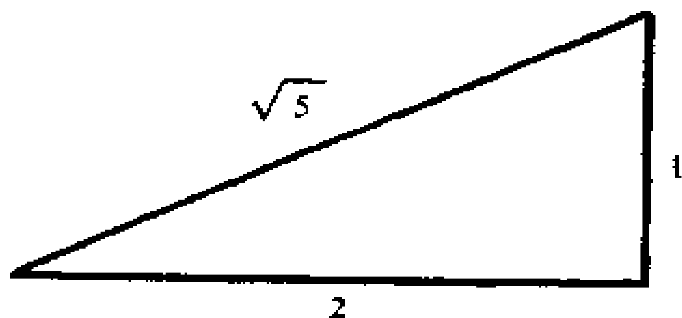


图36 黄金分割或黄金比是$1+\sqrt{5}$与2之比,并被赋予符号ϕ.

观，于是他们在大量建筑物中使用了这个比，包括雅典著名的巴台农神庙．后来的艺术家，包括莱昂纳多·达·芬奇（Leonardo da Vinci）在内，也都使用了黄金分割．毕达哥拉斯学派使用五角星形作为团体的标志，而五角星形中出现了多处黄金分割（参见图37）．

我们透过这个例子已稍稍领略了使数学家们迷恋的东西——数学对象间的相互联系．斐波那契的那个奇妙的序列以黄金分割为极限，而黄金分割又意想不到地出现在形形色色的几何作图中．

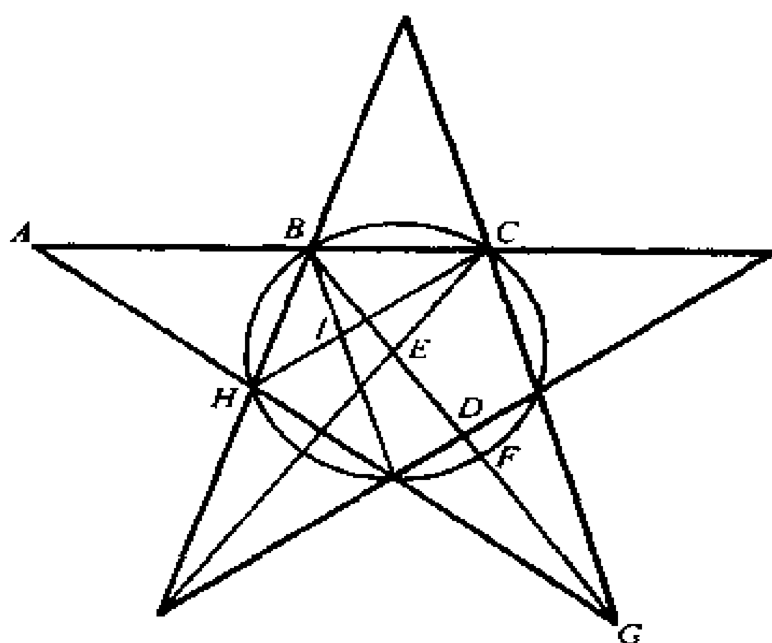


图 37　毕达哥拉斯学派作为团体标志的五角星形．其中含有多处黄金分割．$\phi=\frac{AB}{BC}=\frac{CH}{BC}=\frac{IC}{HI}=\frac{2DE}{EF}=\frac{EG}{2DE}=\sqrt{\frac{EG}{EF}}$．

极限的概念真是既高雅又漂亮，能让我们去研究无穷多的项并使之与有限的对象（极限）联系起来．使用这种技巧，我们还能去发觉数系中埋藏得更深的秘密，从而揭示那些更让人吃惊的奇怪的新数．

序列作为数的集合，有时很难整合到数学公式中，因为它（是数的汇集）并不是普通算术中的一个数值．实现这种整合的

最简单的办法是利用另一个数学概念——级数来代替它.

我们来看序列$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots$,其中的每一项加上一个小量便可得到下一项,由此逐渐趋近1.具体地说,它可改写成$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$,$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$,$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16},\cdots$.即每一项加上它的$\frac{1}{2}$就得到下一项.此时,这个序列中的每一项都是一个相加级数,

[156] 或简称级数.

定义: 级数是一组数的总和.

序列是许多不同的数的汇集,而级数作为一个"和"只是一个数.跟序列一样,级数可以是有限多项的或是无限多项的.

定义: 称级数$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n+\cdots$是无穷级数,若它有无限多项.

下述级数是有穷的:3+9+27.当然我们不一定就此止步,可以一直往下写无穷多项:

$$3+9+27+81+\cdots,$$

这个级数的值将突破任何我们想强加给它的极限.显然它是发散的.

定义: 若无穷级数的和是有限的,则称该级数是收敛级数,

[157] 否则即是发散级数.

现在让我们分析一下芝诺悖论中隐含的级数.按芝诺的说法,每次必须移动某段距离的$\frac{1}{2}$而余下$\frac{1}{2}$距离,依此类推以至无穷.所以该级数应以$\frac{1}{2}$为起点,整个级数可写成$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$.数学家已经发展了一套表示级数的简写法.他们用希腊大写字母$\sum$(sigma,可近似地读作"西格玛")表示"求和",在它之后写上一个表示求和对象的式子.于是上面的级数应写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right),$$

其中 n 的取值为 1,2,3,$\cdots$. 在 $\sum$ 符号下端所标出的 $n=1$ 表示该级数从 $n=1$ 开始;在 $\sum$ 符号上端所标出的 ∞ 表示 n 取遍所有的自然数. 整个符号表示对所有的项求和后得到的一个数. 有时我们把上面的符号再简写为 $\sum\left(\frac{1}{2^n}\right)$, 对一般情况的级数记作 $\sum A_n$.

定义: 级数 $A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n+\cdots$ 可写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n),$$

其中 A_n 代表级数的第 n 项.

像序列一样, 级数也可以有极限. 不妨想像一下, 如果我们能快速地把级数 $\sum\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 中的无限多项加在一起, 那么所得到的值是多少呢? 它可能是 1, 那么 1 就是该级数的极限. 数学家当然不接受这种说法, 他们不喜欢说什么"快速地把无限多的"项加起来, 觉得它太含糊. 因此, 我们要用极限的定义而不用"无限"多项的说法. 我们说当 $\sum A_n=L$ 时, 级数 $\sum A_n$ 有极限.

定义: 称级数 $\sum A_n$ 有极限, 若存在一个数 L 使得 $\sum A_n=L$.

为了说明 L 是极限, 我们必须弄清楚 L 确实是个值(或数), 它等于无穷级数所有的项相加的和.

通常, 我们能够以级数的第 n 项来表示该级数的构成方【158】式. 例如, 对于级数 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$, 我们可写成 $\sum\left(\frac{1}{2^n}\right)$. 这样写能非常方便地表示级数, 并告诉读者级数是如何构成的. 我们知道许多收敛的无穷级数. 有些级数很值得注意:

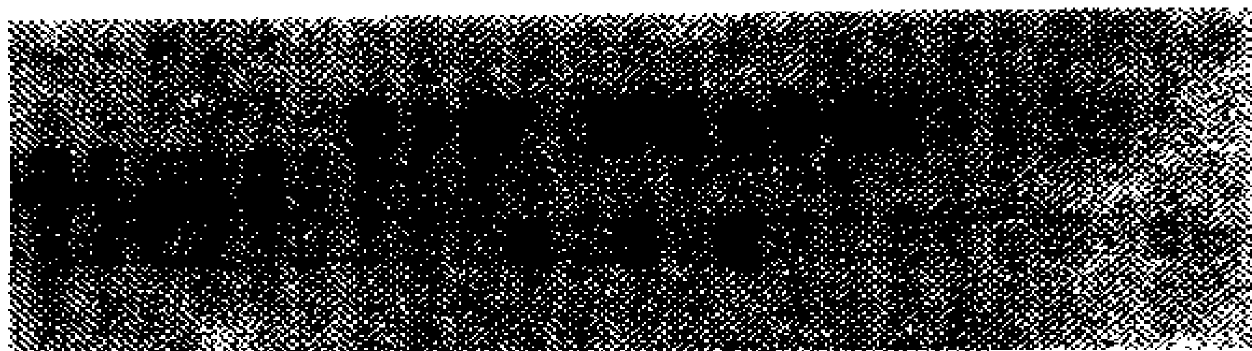
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=\sum\left(\frac{1}{\text{素数}}\right)=\infty,$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum\left(\frac{1}{n^2}\right)=\frac{\pi^2}{6},$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

上面第一个级数是所有素数的倒数之和.这个级数像所有自然数的倒数组成的级数一样是发散的.第二个级数是所有自然数平方的倒数之和,它的极限是伟大的数学家莱昂纳德·欧拉(Leonhard Euler,1707—1783)发现的.注意,此时 π 出现在极限中.这么简单的级数怎么会跟圆的周长和直径之比联系在一起呢?第三个级数称为交错级数,因为各项的符号正负交替出现.它的极限中也含有 π.事实上,π 经常在意想不到的地方显形.这再次证实了数学中存在着奇妙的联系.

有了级数、序列及其极限的概念,我们便能合于理性地来讨论事物连续变化的属性.在高等数学中,我们用极限概念研究那些连续的变化而不只是像自然数那样间断的变化,因此,就能解开曲线,加速度和运动中蕴涵的数学奥秘.要是我们没有发现"极限",现代数学和科学的发展就无从谈起.理解了序列、级数及与之相伴的极限.我们才具备了条件,去探索数系的下一次伟**[159]** 大的扩张——无理数的登场!



我们已经学习了由自然数进化而来的各种各样的数:分数、负数以及零.所有这些数合起来叫做有理数.在普通的日常生活中,每个人对这种数都十分熟悉,从结算帐目到玩二十一点牌戏都要用到它.我们现在开始学习一类数,大多数人对这种数要么一无所知,要么只是许多年前在高中代数课上遇到过.不过,这些新数确实令人吃惊,它能让数学家和门外汉都感到眼花缭乱,困惑难解.

让我们拿代数方程的情况来分析一下,看看为什么自古希腊以来的数学家在他们原以为可以解决的问题上,找不出它们的所有的解答.负数解决了如 $x+5=0$ 这样的初等方程问题.当人们接受了负数,这个方程的解就是 -5.但 $x^2-2=0$ 的情形又如何呢?换句话说,什么数乘上它自己等于 2 呢?从毕达哥拉斯时代以来,数学家就知道 2 的平方根不能用分数表示,因此它不是有理数.所以,为了求出代数方程的所有的解,光有有理数集合显然是不够的.是否存在着其他的数(非有理数,或者说无理数)能够解出这样的方程呢?我们再来考虑我们的数线.图 38 给出了从 0 到 2 之间的一段数线.我们把两直角边均为 1 的直角三角形的斜边放在数线上方,并让这一线段的左端点正对应于 0 的上方.此时另一端点对应于数线上的哪个点呢?从毕达哥拉斯定理可知,这线段的几何长度应为$\sqrt{2}$.如果我们将$\sqrt{2}$长线段的那个端点向下方的数线上落下,那么它在数线上对应的 【161】

那个点肯定不代表有理数．这就是我们希望得到的与$\sqrt{2}$对应的点，它显然跟有一个点与数 2 对应一样清楚明白．我们称这个新数为无理数．与数线上这个点相对应的数是这一类数吗？

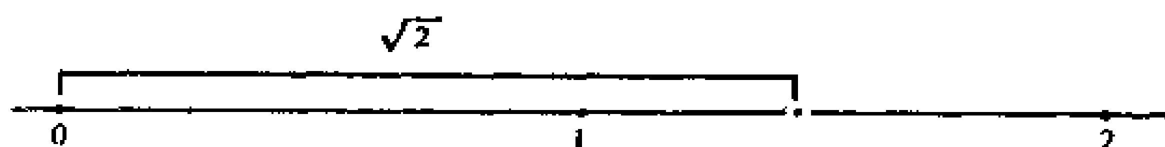


图 38　标明长为$\sqrt{2}$的线段端点下方对应的数线上的点，跟任何一个有理数都无关（有理数皆可表为两个整数之比）．

自古以来，$\sqrt{2}$就被确认为是这种新的无理数中的一个．有没有其他无理数存在的例子呢？由于我们已经证明过$\sqrt{2}$是无理数，所以我们很容易证明$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$以及那些本身为非平方数的所有自然数的平方根也都是无理数．显然，$\sqrt{4}$，$\sqrt{9}$，$\sqrt{16}$是有理数，但所有非平方数的平方根都是无理数．这意味着必定存在着无穷多个无理数．我们还可以通过相加作出很多无理数，例如其值等于 $2+\sqrt{2}$的数必定也是无理数．为了证明这一结论，我们可以使用先假设该数为有理数继而推出矛盾的反证法．假设 $2+\sqrt{2}$是有理数，则存在两个自然数 a，b 使得 $2+\sqrt{2}=\frac{a}{b}$，从等式两边各减去 2 得出$\sqrt{2}=\frac{a}{b}-2$．等式右边显然是有理数，因为$\frac{a}{b}$和 2 162］都是有理数．这意味着等式左边的$\sqrt{2}$也是有理数，而我们已经知道它不是．这一矛盾就证明了 $2+\sqrt{2}$必为无理数．自然，我们可以利用很多种方法作出有理数和无理数的组合并可以用同样的逻辑证明所得的结果是无理数．这表明有理数与无理数的无穷多种组合可产生出更多的无理数．

到目前为止，我们只考虑了自然数的平方根，但还有更多得到无理数的办法．考虑方程 $x^3-5=0$．解出 x，有 $x=\sqrt[3]{5}$，它意味着一个数接连两次乘以它自身之后等于 5．这是一个立方根，也是无理数．依此类推，我们可以定义其他的 n 次方根（其中 n 是

自然数)，几乎所有这些方根都是无理数.事实上，我们可以给出一个小定理，它告诉我们自然数的哪些方根可能是无理数.

定理： *如果 n 和 a 是自然数，则 a 的 n 次根是有理数当且仅当 a 是另一个自然数的 n 次幂；否则它一定是无理数.*

例如，问 9 的平方根是无理数还是有理数？因为 9 是 3 的平方，3 是自然数，9 的平方根就是有理数.考虑 9 的立方根.它是有理数吗？我们知道 9 的立方根不是有理数，因为 2 的立方是 8，而 3 的立方是 27.因此，9 的立方根必是 2 与 3 之间的数.无论它是几，它总归不是自然数.因为它不是自然数，根据上面的定理，它就必定是无理数.类似地，8 的立方根是有理数，因为 8 是 2(一个自然数)的立方，但 8 的平方根就是无理数，因为它不是自然数.

对于上面得到的每个无理数，我们都能画出对应于该数的一个几何量，并将它安置在数线上，一个端点放在 0 点上方，另一端点往下落，我们就得到数线上的一个点，它不会对应于有理数.于是，数线上必定充斥着这些“无理”点.

我们称这样的新数是无理数，但这仅是个名称而已.为了更好地理解无理数，我们必须注意有理数的两个特征.其一，有理数是单序的.

[163]

定义： *一个集合中的数称为单序的，如果下列两个条件成立：*

1) *对集合中任意两数 A 和 B，$A > B$，$B > A$ 或 $A = B$ 三者中必有一个且仅有一个成立.*
2) *若 A, B, C 是集合中的三个数，且若 $A > B$，$B > C$，则 $A > C$.*[1]

对于自然数而言，上面两个条件似乎是不言而喻的，我们在计算时，早已习惯了使用这两个条件.“任意两个整数如果不相等就必须是一个比另一个大”这种说法似乎太幼稚了.然而，那

些陌生的无理数是否保持这种序还不清楚.当我们注视有理数时,我们会"看到"它们的序,这跟我们使用的数系有关.通过观察,我们知道 27 991 比 3 990 大,而 0.199 987 比 0.199 998 小.实际上,数的符号已告诉了我们数的次序.但$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$是否等于$\sqrt{6}$?如不等,哪个更大?这个例子说明现行的数系并不是总能揭示无理数的次序的.我们也许该提出这样的问题:无理数也和有理数一样是单序的吗?

第二个问题跟封闭性(或简称为闭性)有关.我们在前面定义过封闭性.一个集合在一种运算下是封闭的,意指每次对集合中的元素做这种运算所得的结果仍然在集合内.例如,自然数在加法和乘法运算下都是封闭的(或简称为闭的).这就是说,任何两个自然数相加得到的仍是自然数,任何两个自然数相乘得到的还是自然数.

但加法与乘法的逆运算——减法和除法对自然数集不是封闭的.例如 $7-12=-5$.两个自然数相减会得到负数.如果我们将两个自然数相除,在绝大多数情况下得到的是真正的分数而不是整数.另一方面,所有的有理数(自然数,负数,分数和零)在四种基本运算下都是封闭的,除了 0 不能做除数以外.所以我们可以说有理数实际上是封闭的.我们现在知道为什么封闭性是一种重要的性质.它告诉我们进行算术运算时一定会得到另一个有理数.

141]

如果将无理数和有理数合在一起考虑,情况会怎样呢?此时仍然能保持封闭性吗?我们立刻可以看出无理数本身不是封闭的,因为我们有$(\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2})=2$.这个式子是说有两个无理数相乘得到了有理数.更大的问题在于把无理数和有理数合在一起考虑,它们是否失去了封闭性.如果我们对无理数进行算术运算,答案会不会是些奇怪的不是数的东西呢?

无理数给数学家带来的麻烦不光是封闭性和序的问题.现代的数学分析的基础是微积分,而微积分的基础是极限理论.最

初的极限理论利用了来自几何学的概念与想法，如点的序列逼近一个极限点．但能否认为所有的极限点都代表合法的数呢？会不会因为无理数理论不能稳固地建立在有理数的概念之上，而导致高等数学成为空中楼阁而轰然倾倒呢？

欧多克索斯的比

在探讨无理数的现代处理方法之前，我们先用点儿时间回顾一下古希腊人是怎样对付它们的．前面我们说过，$\sqrt{2}$的发现使希腊数学家感到困惑，因为他们找到了一条线段，它不能用自然数（他们仅能接受的数）的比来表示．这一发现导致了几何和代数的分离，因为不能将所有的几何对象都用代数来表示．欧几里得几何使用的证明依赖于这样的思想：几何量（长度、面积、体积）之间都是可以互相比较的．然而，这些量中包含有不可公度的长度．这种量之间能互相比较吗？希腊几何学家需要一种关于不可公度量的理论．

生于小亚细亚尼多斯（Nidus）的欧多克索斯（公元前 408 年一前 355 年）是柏拉图的学生，后来成为一位伟大的希腊数学家．他同时也是医生和天文学家，用于解释天体运行的同心球理论就是他的创造．他提出了一种比例理论来解释如何在几何中使用不可公度量．他的比例理论保存在欧几里得《几何原本》的第五卷中．这个理论的叙述方式有些晦涩难懂．数学家们一直在琢磨它，直到 19 世纪才将它彻底改写．比例的定义见诸于欧几里得的著作，反映了当时希腊人为搞清这一概念而进行的奋斗．

【165

> 称第一量比第二量跟第三量比第四量有相同的比，如果对第一量与第三量取任何相同的倍数，又对第二量与第四量取任何相同的（另一个）倍数之后，由前两个量的倍数之间的大于、等于或小于的关系，便有后两个量倍数之间的相应关系．[2]

这种高深莫测的定义可能意味着什么呢？看来，欧多克索斯必定曾彻夜冥思苦想，试图弄清楚（最后要通过欧几里得之手）别人都不懂的东西．要理解他的陈述，我们必须记住希腊数学的两个特点．首先，欧多克索斯不去谈论数而是在讨论量．这是两样不同的东西，彼此并无关系．第二，希腊人没有分数，所以他们总是说数的比和量的比．我们的分数$\frac{2}{3}$对他们来说是 2:3．由于几何的缘故，他们也去谈几何量的比而不是数的比．例如，他们知道两个圆的面积之比等于两圆直径平方之比．我们可以将其表示为

$$(\text{圆 A 之面积}):(\text{圆 B 之面积})=(\text{圆 A 之半径})^2:(\text{圆 B 之半径})^2.$$

希腊人必须确保：当这些量的比含有不可公度的长度时，它们之间的次序关系仍然成立．换句话说，当他们的几何证明涉及不可公度的长度之比时，其证明是否还成立？欧多克索斯所创立的定义正是试图去保证这种证明的有效性．在两个比中出现的量我们用下列标记：第一个：第二个＝第三个：第四个．

56] 欧多克索斯说，第一个和第二个量跟第三个和第四个量有相同的比，如果我们将第一个与第三个乘以同一个量，将第二个与第四个乘以另一相同的量，则所得的第一与第二量之间的序关系将在第三个与第四个中得以保留．

这种解释看起来简单，但实际上让人觉得很含混．我们用一个例子来弄清他的意思．我们指定四个量的长度为 $3:6=7:14$．此时有不等式 $3<6$ 和 $7<14$．欧多克索斯说，如果我们对 3 和 7 乘以任一量 A，并对 6 和 14 乘以任一量 B，则 3 和 6 经变换后的序关系与 7 和 14 经变换后的序关系相同．设 $A=5$，$B=2$．做乘法后得

$$A\cdot 3:B\cdot 6=A\cdot 7:B\cdot 14 \quad \text{或} \quad 15:12=35:28.$$

显然 $15>12$，$35>28$．因此乘以 5 和 2 之后两个比的序仍然相同．欧多克索斯的定义说，对于相同的两个比，无论 A 和 B 的值

是什么，都能使对应量之间的序保持相同.这实际上给出了希腊几何学中的由比组成的量的定义.然而，量不是数，而且定义中引入了对所有的 A 和 B 都要满足的要求，这样一来，无限的概念就从后门溜了进来.欧多克索斯的工作满足了几何学家的要求，但当遇到需要算术或是要对无理数建立一个健全的理论基础时，又显露出它的不足和失当.

在给出无理数的最佳解释之前，我们必须给那些最早将无理数列入数系中的数学家记上一功.印度人，特别是婆罗摩笈多，认为无理数作为方程的解是合理的.因此他们毫不犹豫地接受$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$为所求问题的解.另一个著名的数学家是奥马·海亚姆(Omar Khayyam，约 1050—1123)，他在西方以诗人而闻名.希腊人利用几何方法求解方程所得的解是长度，他则用数字作为方程的解.他也为定义无理数花费了一番功夫.

在几乎整个中世纪，欧洲的数学家只承认自然数和分数可以作为方程的解.随着代数符号化的进步，老的修辞方法最终被【167】抛弃了.当用词语表达的代数被符号代数取代时，负数和无理数(表示成整数的平方根形式)就渐渐地开始被接受为解了.例如，如果在修辞代数中说七只鹅中少掉十一只鹅是负四只鹅，令人难以想像."负四只鹅"到底是什么意思呢？但若使用符号，我们写成 $7-11=-4$，就避开了这个困难.代数的抽象化，使数学家开始使用负数和无理数，但对于它们到底是什么，在那个年代还没有任何为人们所接受的定义.

有三位数学家，人们常常认为他们是最伟大的，即阿基米德，伊萨克·牛顿爵士(Sir Isac Newton)和高斯.高斯(1777—1855)出生于一个劳动者的家庭，从孩童时代起就显示出了巨大的天赋，正是他推动了人们去接受无理数(图 39).在学生时代，他写了一部杰作《算术研究》(Disquisitions Arithmeticae)，是他的博士论文.然而这部手稿被拖延了三年才出版.在这期间，为了拿到学位，他又写了另一篇短文，此文于 1799 年他 22 岁时出



图 39　卡尔·弗莱德里希·高斯，1777—1855.（布朗兄弟出版社，斯特灵市，宾夕法尼亚州）

版.在第二篇文章中高斯证明的就是后人所称的"代数基本定理".还有哪个定理能比它更著名呢！这个定理说：每个含有一个未知数的多项式方程①至少有一个解（或称为根）.这个定理的推论说，解的个数与未知数的最高幂次一样多.因此下列多项式方程

$$A_0X^n + A_1X^{n-1} + \cdots + A_{n-3}X^3 + A_{n-2}X^2 + A_{n-1}X + A_n = 0$$

---

① 多项式方程是一种方程，其左边为一个或多个未知数（一般为 x，y 等等）的一些幂次并乘以称为系数的数.方程右边一般是0.如 $5x^2+3x-4=0$ 是有一个未知数的、系数为 5，3，-4 的多项式方程.

恰有 n 个解. 在有些情形下,我们会得到相同的解,例如方程 $x^2-10x+25=0$;若将该方程分解为 $(x-5)(x-5)=0$,立即可知两个解都是 5. 我们关心的重点是该定理说像 $x^2-2=0$ 这样的方程有两个解. 事实上这两个解就是 $\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$,都是无理数. 因此,随着代数基本定理的证明,高斯自然得接纳无理数作为方程的解. 后面我们还将看到,高斯为人们接纳另一类全新的 【168】 数——复数打开了通道.

随着高斯在 19 世纪初为无理数打造了催熟的温床,人们又继续对无理数的定义展开了探索,那将是个意味深长的定义.

美妙的戴德金分割

当走到无理数的现代定义面前,探索它的奥秘时,我们颇感欣慰. 有理数的历史如此悠长,以至无法说清是什么时候、是哪一位在数他(或她)的手指时,突然醒悟道:"啊哈! 自然数!"我 【169】 们也无法弄清楚发现分数或负数的数学家的具体想法. 而建立无理数的逻辑基础是离我们不太远的事;我们甚至可以自己去购买和阅读那些美妙的文章. 无理数的定义出现于 19 世纪伟大的德国数学家理查德·戴德金(Richard Dedekind, 1831—1916)的一份薄薄的手稿中,文章名为"连续性与无理数".[3] 任何人拿起这篇文章坐下来读它,几分钟就可读完. 就是这样简明,而又蕴涵着撼人的力量.

戴德金生于德国的不伦瑞克(Brunswick),17 岁时进入大学,1852 年 21 岁时获得格丁根(Göttingen)大学博士学位,他的导师就是著名的高斯.

虽然戴德金 1858 年就发现了他的理论,但一直到 1872 年才发表. 在"连续性与无理数"一文的开头,他说他不满意微积分中使用的连续性概念,因为它依赖于从几何学中借来的概念. 在深思熟虑之后,他在 1858 年 11 月 24 日得出了他自己的解决办法.

戴德金做的第一件事就是定义由所有的有理数组成的集合为系统 R. 他接着说, R 中的数服从下列规律:

> Ⅰ. 如果 $a>b$, $b>c$, 则 $a>c$. 只要 a 和 c 是两个不同(或不等)的数,而 b 大于其中的一个且小于另一个,那么,根据几何的启发,我们将毫不犹豫地简述为: b 在数 a 和 c 之间.
>
> Ⅱ. 如果 a, c 是两个不同的数,则有无限多个数位于 a, c 之间.
>
> Ⅲ. 如果 a 是任一给定的数,则系统 R 中全部的数分为两类 A_1 和 A_2, 每一类都包含有无限多个数,第一类 A_1 由所有小于 a 的数 a_1 组成,第二类 A_2 则由所有大于 a 的数 a_2 组成. 数 a 本身可随意被指定为属于第一类或第二类,于是它或为第一类中最大的数或为第二类中最小的数. 无论哪种情形都已将数系分为两类 A_1 和 A_2, 使得第一类 A_1 中的每个数都小于第二类 A_2 中的每个数.[4]

[70]

要想更清楚地阐述戴德金的思想还得费点周折. 第一条规律我们已经碰到过,它说明有理数是有序的. 第二条规律说明在任意两个有理数之间存在无限多个数. 第三条规律表明了他的思想的实质. 它说明每个有理数都将全部有理数分为两类,使得第一类中的每个数都小于第二类中的任一数. 作出这个分类的有理数可以算在两类的任何一类中. 它可以是 A_1 类中的最大数或是 A_2 类中的最小数.

到目前为止,我只引用了戴德金有关有理数的论述. 当他准备去定义无理数时,他只是从第三条规律中去掉了由一个有理数将全部有理数分为两类的要求. 他这么做正确吗? 他说:

> 如果现在给定任一种分类将系统 R 分为 A_1 和 A_2 两类,且这种分类仅仅具有下面特殊的性质: 每个 A_1 中的数 a_1 必小于 A_2 中的每个数,于是为了简便起见,我

们将这种分类称之为**分割**(Schnitt)并记之为(A_1, A_2).[5)]

我们可能会问,为什么戴德金感到定义一个新术语,即分割,是如此必要呢?他为什么要用分割来取代用点的概念将数线上的有理数分为两类呢?我们必定记得,他要让无理数的概念跟诸如点和线这样的几何概念分离.在上述关于分割的定义中,他做到了这点,因为他依靠两个数类来定义分割,其中第一类中的每个数都小于第二类中的任一个数.他聪明地避免提到线或点.

他定义了分割,但并没有说将怎样去实施分割.我们已经知道,利用任何一个有理数都可以产生一个分割,现在的问题是,不使用有理数是否也能作出这种分割.戴德金是这样回答的:

很容易证明存在无限多个不是由有理数产生的分割.下述例子最能说明问题.

设 D 是正整数,但它不是某个整数的平方,则存在一个正整数 λ,使得

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$$

如果我们指定第二类 A_2 中的数 a_2 为任何平方大于 D 的正有理数,所有其他的有理数 a_1 都属于第一类 A_1.这样的分类得出一个分割(A_1, A_2),即每个数 a_1 < 每个数 a_2.……这一个分割不是由有理数产生的.[6)]

【171

这段话说的是什么呢?首先,他指出每个本身不是某个自然数平方的整数 D,必介于两个相差为 1 的整数的平方之间.例如 5 介于 4 和 9 之间,而 $4 = 2^2$, $9 = 3^2$.于是他可以选取其平方大于 5 的所有正有理数组成 A_2.用这种聪明的办法,戴德金得

到了用来定义$\sqrt{5}$的分割，而$\sqrt{5}$是一个无理数．注意，在他定义分割时只用到了有理数．这样就避免了用无理数来定义无理数．

第二个例子．我们可以按下述办法为无理数$\sqrt{2}$确定一个分割：设A_2包含所有其平方大于2的正有理数，所有其他的有理数组成A_1．到这里你得仔细想一想，但很快就会恍然大悟，正如戴德金在1858年11月24日所经历的那样．注意图40，它显示了2和$\sqrt{2}$在数线上的位置．现在来想象任何大于$\sqrt{2}$的有理数（在$\sqrt{2}$的右方）．我们知道那种有理数的平方必大于2．

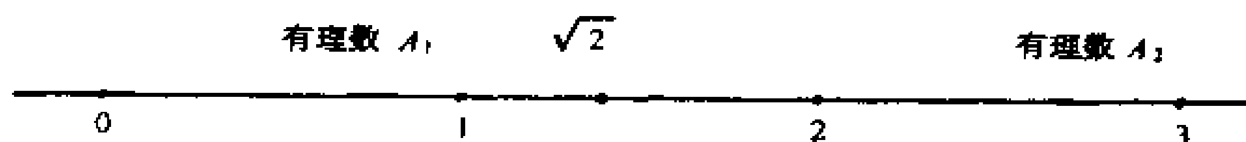


图40　一个戴德金分割．所有（负有理数及）平方小于2的有理数组成A_1（在$\sqrt{2}$左边的数线上）．所有平方大于2的（正）有理数组成A_2（在$\sqrt{2}$右边的数线上）．这两个有理数集（A_1与A_2）定义了无理数$\sqrt{2}$．

这种设计太妙了，仅仅使用由有理数造成的分割就将有理数分了类，由此戴德金定义了无理数．

> 这样，一旦我们有了一个由非有理数产生的分割（A_1，A_2），我们就造出了一个新数a．它是个无理数．我们说它完全由分割（A_1，A_2）所确定；我们还将说数a对应于这个分割（A_1，A_2），或说它产生了这个分割．于是从现在起，每一个确定的分割对应着一个确定的有理数或无理数．我们说两个数是不同的或不等的，当且仅当它们对应着本质上不同的分割．[7]

由所有有理数和无理数共同组成的数集叫做实数集．通过用分割（那是无限多个有理数的集合）来定义所有的实数，戴德金实质上已经在使用无限集来定义数了．因此，我们的数系是以

无穷这一概念作为严格基础的.古希腊人从未接受用这一概念来表述数学的基础.

戴德金不仅定义了无理数,他还进一步利用分割定义了实数的加法运算.一旦完成了这一步,实数的其他三种算术运算就比较容易定义了.他的定义使他断定,对实数(有理数或无理数)实施四种算术运算后所得到的结果永远还是一个实数(零作除数的情况除外).这样他就知道实数系统具有封闭性,从而断定一个简单的等式成立:$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$.至此,戴德金已为无理数建立了一个安全的基础.现在我们可以来问:无理数究竟是什么?

十进小数之趣

十进小数体系的发明给计算带来了巨大便利,它使用一个点将一个数的整数部分和分数部分分开.分数互相加、减是特别麻烦的,有时比较它们的大小也很困难.例如,$\frac{21}{73}$和$\frac{143}{517}$哪个大?很难一眼看出答案.但当我们观察它们的小数表示的前四位时就能立刻看出答案:因为$\frac{21}{73}=0.287\,7$,而$\frac{143}{517}=0.276\,6$.从它们的小数形式我们知道$\frac{21}{73}$是较大者.

十进分数最早是在文艺复兴时期引入的.1492年,弗朗切斯科·佩洛斯(Francesco Pellos, 1450—1500)出版了名为《算术概要》(Compendio de lo abaco)一书,书中出现了使用点来标记分母为10的幂次的分数.[8]古代巴比伦人一直使用以60为基底的60进位制分数.西方天文学一直采用六十进制分数作度量标准,在中世纪的黑暗时代也用这类分数进行普通的计算.在佩洛斯之后的一段时期,人们还在使用60进位制分数.最后,法国数学家弗朗索瓦·韦达(François Viète, 1540—1603)力主使用十进制体系.在约翰·纳皮尔(John Napier, 1550—1617)引入区分整数部分和分数部分的小数点后,十进小数就为大众所接受了.

【173

现代的小数系统是一种简记法，它实际上是把分数表示为若干分母为10的幂次的分数之和.对于834.572这个数我们可写成：

$$834.572=8\cdot10^2+3\cdot10^1+4\cdot10^0+\frac{5}{10^1}+\frac{7}{10^2}+\frac{2}{10^3}$$

$$\text{或}\ 834.572=800+30+4+\frac{5}{10}+\frac{7}{100}+\frac{2}{1\,000}.$$

小数表示法的好处是显而易见的：我们可以利用很小的空间写出一个数，用小数作算术运算也非常容易.

然而，小数表示有一种奇特的性质：在将一个分数表为小数时，我们一般都是（利用长除法）用分数的分母（分数线下面的数）去除分数的分子（分数线上面的数）.例如，$\frac{2}{5}$是用5去除2，得到0.4.这种小数叫做有尽小数，因为在小数点右边的数字是有限的，也就是说它们有个自然的结尾.

现在我们把$\frac{1}{3}$表示为小数.用3去除1的过程如下：3不能直接除1，所以我们要写下小数点，并在1后边加上一个0，即写为10.用3除10，得3并且余1.在小数点右边写下3，即0.3，但此时仍有余数1.我们在1后边再加个0，得到10，依此类推.每次我们用3除都得到3并余1，这个过程没有尽头，因此为了将$\frac{1}{3}$表示为精确的小数，我们只得写下一串无限多个3字.为了避免这种麻烦事，我们用三个点写在最后一个3的右边，以表示后面还有无穷多个3.于是，$\frac{1}{3}=0.333\cdots$；而且我们知道写出任何有限多个3都只是$\frac{1}{3}$的近似值.有些教科书在最后一位的上方写一个点表示重复，即$0.33\dot{3}$，意思是点下面的数字是重复的.这类小数叫做无限循环小数.很多分数是无限循环小数，其中许多还具有多个循环数字.考虑分数$\frac{3}{11}$，它

的小数表示是0.272 727，我们在这里只重复写了27这个循环三次，此时重复的数字超过了1个．当然，我们可以把它写得更简单些，即$0.\dot{2}\dot{7}$．

对于分数，我们可以说：任何一个分数都可表示为有尽小数或是无限循环小数．反过来，任何一个有尽小数或是无限循环小数必可表示为分数．将小数返回去表示成分数并不困难．我们先看有限位小数的情形．假定我们的小数是1.028．我们先数清楚小数点右边的位数有几个，这时是三个．我们将它表为分子等于该小数、分母为1的分数．然后将分子、分母同乘10^3．这里取10的幂次为3是因为小数点右边有三个数字．于是，我们得到

$$1.028=\frac{1.028}{1}=\frac{1.028\cdot 1\,000}{1\cdot 1\,000}=\frac{1\,028}{1\,000}.$$

这样就得到了一个分数．通过消去分子分母的最大公因子，我们可将分数约简为它的最简形式，即$\frac{1\,028}{1\,000}=\frac{257}{250}$．现在我们知道小数1.028等于分数$\frac{257}{250}$．

将无限循环小数化为分数要有点儿技巧，但也不难．试看$0.333\,3\dot{3}$．首先数清楚循环的数字个数，此时是1，要用10^1乘以小数；如果循环的数字个数是2，则指数要用2，即用10^2来乘．$0.333\,3\dot{3}$乘以10^1得到$3.333\,3\dot{3}$．注意此时小数点右边3的个数与原来相同．可以这么写是因为右边有“无限多个”3．我们从这个大一些的小数中减去原来的小数，请注意发生了什么：

$$\begin{array}{r} 3.333\,3\dot{3} \\ \underline{0.333\,3\dot{3}} \\ 3.000\,00 \end{array}$$

所有循环的数字都没有了，留下的是有尽小数3.0；3.0等于10个原来的小数减去1个原来的小数，即10乘原小数减去1乘原小数等于3.0，这意味着原来的小数$=\frac{3}{9}$或$\frac{1}{3}$，这正是我们

所期待的.

我们可以对任何一个无限循环小数实施这种运算，从而将它变为分数.当然，你可以对某些奇怪的事情持保留态度，例如，我们用10乘以一个无限循环小数时，是将其中的所有数字都向左移一位(这跟我们说将小数点向右移一位是同样的).我们怎么知道是否可以这样做呢？这个问题引出了小数系统的一个奇怪的性质，它似乎跟人们的常识相悖.我们可以问这样的问题：数$0.999\,9\dot{9}$的确切值是什么？它是比1只小一个无穷小量的数吗？事实上，它正好就是1！如果我们将$0.999\,9\dot{9}$化为分数，就可以看出究竟了.用10来乘该小数，再减去原小数，得

$$\begin{array}{r} 9.999\,9\dot{9} \\ \underline{0.999\,9\dot{9}} \\ 9.000\,00 \end{array}$$

10乘该小数减去1乘该小数等于9，或者说原小数为$\frac{9}{9}=1$.当然这样做还得依赖于对无限位小数作乘法，以及令每位数字向左移一位的概念.如果我们求助于极限的概念就会知道这样做是合理的.我们将小数$0.999\,9\dot{9}$表示为无穷级数，即

$$0.999\,9\dot{9}=\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1\,000}+\cdots.$$

如果有人说0.999 99小于1，那么必然比1小一个确定的量，可记作ϵ.但无论他们如何选择ϵ，我们总可以在$0.999\,9\dot{9}$的小数展开式中添加足够的项，使得它跟1的接近程度小于ϵ.因此，1必是$0.999\,9\dot{9}$这一小数展开的极限.

到目前为止，我们东游西逛还完全没顾上无理数的情形.我们要问，无理数的小数展开是什么样的？它是无限的不循环的小数.于是一个无理数，如$\sqrt{2}$，可表示成一个无限不循环的小数.能不能既不用分数也不用小数而精确地表示这种数呢？回答

是：不能.正是无理数的这一特征使某些人对它们深感不悦，无理数显得杂乱无章，而且写不完全.然而，从另一个角度看，无理数却有一股魅力，它们的小数展开四处游荡，决不落入循环的俗套.实际上，有些数学家已被某些常用的无理数的小数展开迷住了.

圆的周长与直径之比的值是 π.我们已经知道 π 是一个无理数，它的小数展开的前101位数字是：

3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286 208 998 628 034 825 342 117 067 9…

尽管数学家们都清楚，这个展开永不会成为无限循环的形式，他们还是禁不住想知道，在这个展开式的后面是否还深深地隐藏着另一种模式.例如有一个名叫"数之数"的无理的小数，它由相继的自然数构成：0.123 456 789 101 112 13….由于它是无理数，不会出现循环的展开形式，但扩充它的展开式的方法却是显然的：即在下一组数位上写出下一个自然数.π 的情况是怎样的呢？我们是否能发现某个模式来揭开它的秘密呢？1989 年秋季，几个不同的数学家小组用超级计算机计算出了 π 的前十亿位数字，希望能发现一些料想不到的东西，可时至今日还未成功.不过，他们仍然没有放弃努力，这一竞赛今天还在继续，看看哪一拨数学家能算出最多的数位.

当考虑无限不循环小数时，我们可能想知道在小数展开中不同数字出现的频率各是多少.换句话说，是否存在这样的数，当我们来数其小数展开式中 0，1，2 等所占的比例时，我们将会发现这 10 个数字中每一个出现的次数各占 10%.回答是肯定的.这样的数称为"正规数".如果一个数在任何基底下的小数表示中的所有数字出现的频率都相等，则称之为绝对正规数.数学家们知道绝大多数的数都是绝对正规数，但他们尚无法去验证具体的数是否是正规数.因此，我们不知道 π 是否是正规数.下

面这件事是不是太奇怪了:我们日常生活中经常碰到的数几乎总是有理数,它们之中几乎没有一个是正规数,但所有实数中占压倒多数的数都是正规数.既正规又有理的数的例子是循环小数0.012 345 678 901 234 567 890 123 45…,在每次循环中每个数码出现一次.

我们该怎样来计算无理数呢?事实上,在我们学习收敛级数时就已经为此做好了准备.为了计算一个无理数的十进小数展开式,我们只要计算一个无穷级数中相继的项即可.例如为了计算$\sqrt{2}$,我们可以利用下列级数

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot4}+\frac{3}{2\cdot4\cdot6}-\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\frac{3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}-\cdots.$$

这个级数看起来很杂乱,其实是很容易计算的.我们可以重新写一下这个式子,使得每一项都是前面一项乘以一个适当的因子

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\left\{\frac{1}{2}\right\}\left\{\frac{1}{4}\right\}+\left\{\frac{1}{2\cdot4}\right\}\left\{\frac{3}{6}\right\}-\left\{\frac{3}{2\cdot4\cdot6}\right\}\left\{\frac{5}{8}\right\}$$
$$+\left\{\frac{3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\right\}\left\{\frac{7}{10}\right\}-\cdots.$$

现在我们可以来计算$\sqrt{2}$的十进小数展开式,并看看逐项添加时是如何逼近它的六位正确值1.414 21的.表5给出了级数前十五项的值.计算完这十五项后该级数的值只精确到3位,看来逼近$\sqrt{2}$的过程很慢.当然,计算机每秒可做许多万次运算,用现代技术逼近无理数是不成问题的.为了使计算收敛得更快,数学家们实际上会使用更复杂的函数去代替这里所列出的简单函数.

我们在前面曾提到过一个级数,可以用它来逼近π:

$$\pi=4\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right\}.$$

这个级数的前十五项列在表6中.用跟表5中所列级数相同的项数来计算,它只能给出π的一位正确值,它比逼近$\sqrt{2}$时所用的级数收敛得更慢.

表 5　$\sqrt{2}$的逼近

项数	单项值	级数和
1	+1.000 00	1.000 00
2	+5.000 00	1.500 00
3	-0.125 00	1.375 00
4	+0.062 50	1.437 50
5	-0.039 06	1.398 44
6	+0.027 34	1.425 78
7	-0.020 51	1.405 27
8	+0.016 11	1.421 38
9	-0.013 09	1.408 29
10	+0.010 91	1.419 20
11	-0.009 27	1.409 93
12	+0.008 01	1.417 94
13	-0.007 01	1.410 93
14	+0.006 20	1.417 13
15	-0.005 54	1.411 59

表 6　π 的逼近

项数	单项值	级数和
1	+4.000 0	4.000 0
2	-1.333 3	2.666 7
3	+0.800 0	3.466 7
4	-0.571 4	2.895 3
5	+0.444 4	3.339 7
6	-0.363 6	2.976 1
7	+0.307 7	3.283 8
8	-0.266 7	3.017 1
9	+0.235 3	3.252 4

续表

项数	单项值	级数和
10	-0.210 5	3.041 9
11	+0.190 5	3.232 4
12	-0.173 9	3.058 5
13	+0.160 0	3.218 5
14	-0.148 1	3.070 4
15	+0.137 9	3.208 3

[179]

甚至有理数也可以是级数的极限值，阿基米德就发现$\frac{1}{3}$可表示成下述级数：

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots.$$

连分数是一种特殊的无穷级数，它由一个整数加上一个分数组成，分数的分母又是另一个整数加上一个同样类型的分数．如果一个连分数没有终点，我们就称它是无尽连分数．下面是个很漂亮的无尽连分数：

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

等式左边的值正是美妙的黄金分割．众所周知，每个无理数都可表示成无尽连分数，因此可以用连分数来计算任一个无理数的值．

我们已经讲了很多有助于理解无理数的基本知识．我们讲了戴德金的精巧定义，这定义赋予无理数以坚固的理论基础．我们还知道，像有理数一样，无理数也是有序的；实数系统对所有的运算（除了零不能做除数）是封闭的．我们可以像对有理数做运算那样去对无理数进行运算．由此我们就可以去讨论直线上

所有的点了，因为实数与数线上的点是一一对应的．我们还想知道些什么呢？

在讲无理数时我们避开了一个问题：到底有多少无理数？我们知道有无限多个，但无理数比有理数"多"还是"少"呢？既然有理数和无理数都有无限多个，那么问它们谁多谁少还有什么意义呢？下面我们准备揭示这个问题的奥妙．【180

第10章 e的故事：超越数

其他种类的方程

到目前为止，我们注意的一直是形如 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的多项式方程，其中 a_0 到 a_n 是 x 的各次幂的系数，我们称这样的方程是标准的多项式方程．然而在解决具体问题时，我们会建立跟多项式方程不同形式的方程．我们特别要考虑下面三种其他类型的方程：指数方程，对数方程和三角方程．这些方程对于解决现代的从精炼石油到发射太空梭等等问题都是非常基本的．

指数方程是指方程中的未知数位于数的指数部分上，诸如方程 $12^x = 144$．我们需要知道 12 的多少次幂等于 144．答案很简单，是 2，即 $12^2 = 144$．但另一些指数方程的答案就不那么直截了当了．例如 $1.0994^x = 17.32$，x 是什么？它是有理数还是无理数？

你大概还记得在高中或大学的代数课中学习过的对数．它们是某数的指数．例如 100 这个数的以 10 为底的对数为 2．这意味着 10 的 2 次幂等于 100．我们用符号可表示为 $\log_{10}100 = 2$．以 10 为底的对数称为常用对数．我们常常略去 10 而写成 81] $\log 100 = 2$．对数有一个非常好的性质：计算两个数乘积的对数可以通过将它们的对数相加来算，原因是存在等式 $A^c \cdot A^d = A^{c+d}$，例如 $3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$．因此当我们碰到一个困难而且烦

杂的乘法问题时，常常可以通过对数将它变为简单的加法．我们也会解某些用对数形式表达的问题．例如，我们可能遇到 $\log x = 2$ 这样的方程，并想要知道 x 等于什么．这个例子很简单，$x = 100$．在解决涉及指数的问题时，使用对数是一种方便的办法．

三角方程是基于直角三角形的边长与角之间的关系而建立的．图 41 中有一个直角三角形并标出了它的一个角 θ（希腊字母，读作 theta），三条边分别标为斜边、对边和邻边．为数众多的三角函数都是根据 θ 与三角形的三条边的关系而定义的．角的正弦定义为对边除以斜边，记为 $\sin\theta = \frac{对边}{斜边}$．$\sin\theta$ 正如 $\log 100$ 一样是一个数．$\sin 30^\circ = 0.5$，它表明当 θ 是 30° 时，斜边的长度是对边的二倍，他们的比是 $\frac{对边}{斜边} = 0.5$．

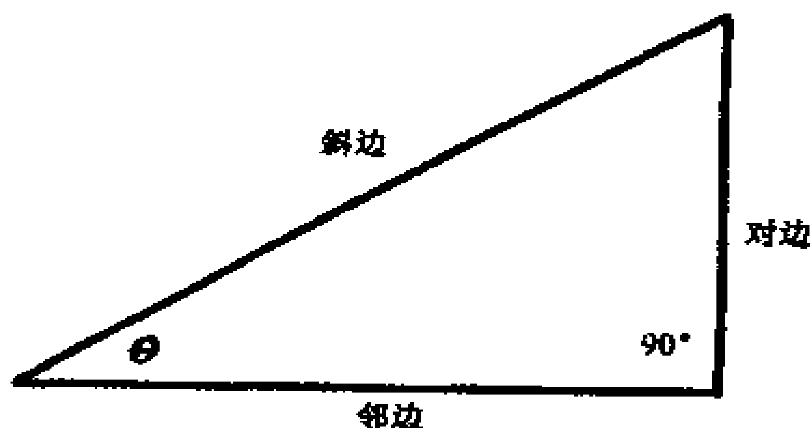


图 41　三角关系涉及直角三角形中一个角 θ 与其三条边的长度之间的关系．正弦关系定义为 $\sin\theta = \frac{对边}{斜边}$．

当我们赋予指数、对数和正弦函数中的变数以不同的值时，我们将得到哪一类数呢？在某些情形，我们会像上面一样得到 **[182]** 自然数和分数，即我们得到了有理数．我们会得到无理数吗？事实上，绝大多数这类方程的解是无理数，例如，设 θ 是 0° 到 90° 之间的任一有理数度数，则除了 $\theta = 30^\circ$ 以外，其他所有的 $\sin\theta$ 都

是无理数.

如何定义难以捉摸的 e

圆的周长和直径的关系自古知之，现以符号 π 表示. 最早用希腊字母 π 表示这种关系的是瑞士数学家欧拉（1707—1783）（图42）. 欧拉是有史以来最多产的数学家之一，出版了500

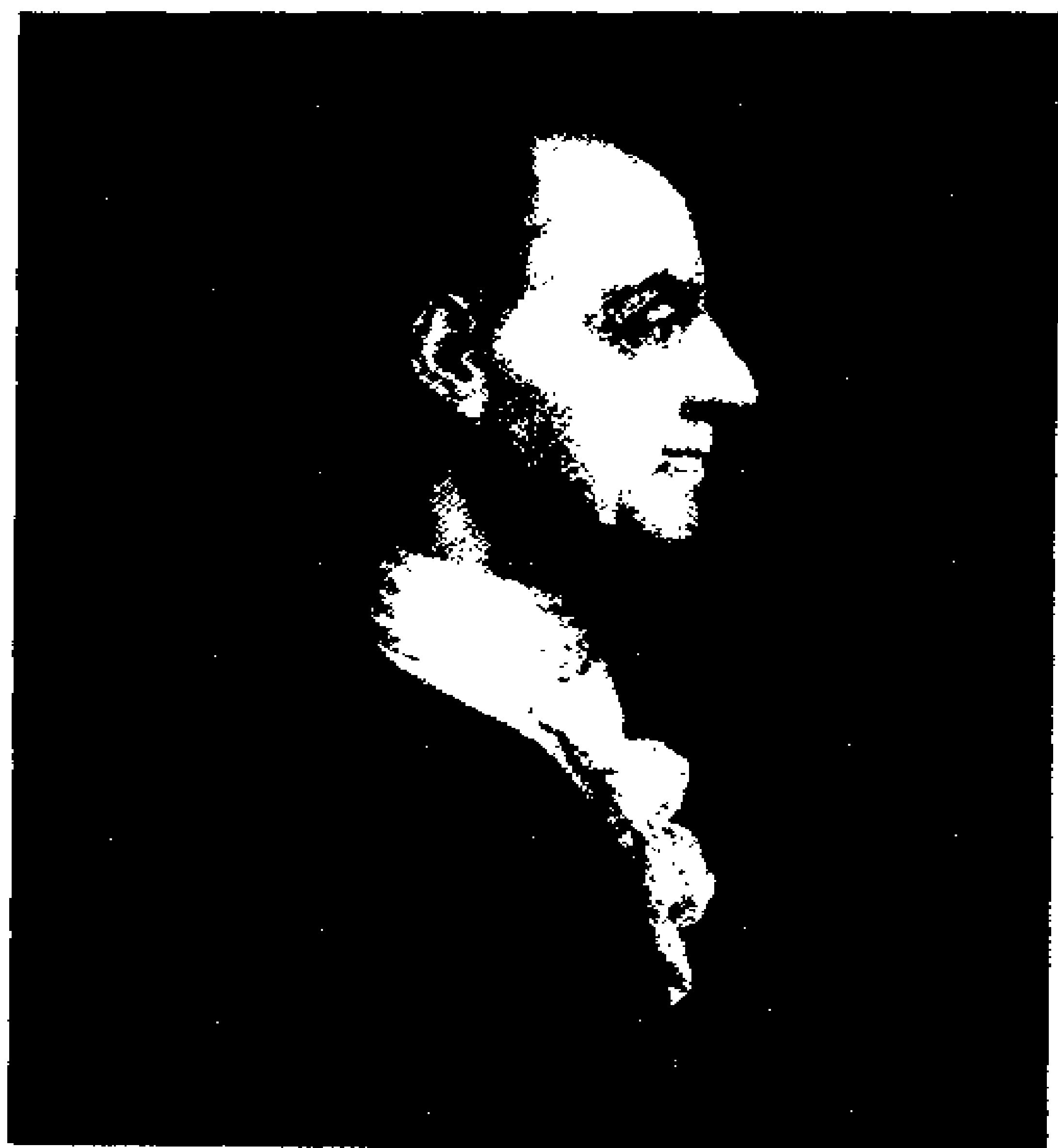


图 42 莱昂哈德·欧拉，1707—1783.（布朗兄弟出版社，斯特灵市，宾夕法尼亚州）

多种书和论文,他创作的数学成果足足有90卷之多.[1]欧拉还确定了使用字母 e 代表另一个基本的数学关系:

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

因此,e 是我们让 n 变得越来越大时得到的极限值.换句话说,我们可以由公式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 生成一个数的序列,其中 n 从1开始依自然数的顺序增长.这个数的序列将逼近 e 的真值.因此 e 是我们的序列的极限,记为

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

跟我们对 π 所做的讨论一样,我们可以从 $n=1$ 开始渐次对增大的 n 来计算 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的值(见表7).

表7　e 的逼近

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	e 的逼近值
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	2.000
2	$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$	2.250
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$	2.370
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	2.441
5	$\left(1+\frac{1}{5}\right)^5$	2.488

如果我们继续这个过程,肯定可以达到精确到10位小数的近似值:$e = 2.718\,281\,828\,4\cdots$. e 这个数还伴随有一个漂亮的级数,是牛顿(1642—1727)在1665年第一个发现的,当时他只有23岁.你应该记得所谓级数是一些项的和,而不是由一些项组成的序列.在介绍这个奇妙的级数之前,我们需要先记住一个在数学中常用的约定.数1和数2相乘,我们得到 $1\cdot 2 = 2$.如果让自然数中的前三个数相乘便得 $1\cdot 2\cdot 3 = 6$,前四个数相乘得 $1\cdot 2\cdot$

【183】



3·4 = 24. 我们称这种乘法为阶乘，为了写起来省事，我们用符号
184】"!"表示. 因此 1·2 = 2! = 2，1·2·3 = 3! = 6，1·2·3·4 = 4! = 24. 你一定看得出这些阶乘的值增长得很快. 例如，10! = 3 628 800. 在数学中我们经常会遇到阶乘的值，所以这种简写方式十分有用.

牛顿发现的 e 的级数是这样的：

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots.$$

符号 0! 定义为 1. 上面的级数可写成 $e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots$，也可表为 $e=\sum\frac{1}{n!}$，其中 n 要假定取遍从 0 开始的全部整数值. 你要记住，希腊大写字母 $\sum$ 表示我们要将级数中所有的项相加.

数学家和科学家们对 e 很感兴趣，理由是会在许许多多需要解决的问题中遇到它. 这跟它下面的一个漂亮性质相关，即对于值很小的 x，我们有 $e^x\approx 1+x$. 这里我们使用了一个特殊的符号，即近似符号 $\approx$，它表示等式两边很接近但未必相等. 我们可以看到当令 $x=\frac{1}{n}$ 而 n 很大时，上面的关系式仍然成立，即 $e^{\frac{1}{n}}\approx 1+\frac{1}{n}$. 在此式两边取 n 次幂，我们得到 $(e^{\frac{1}{n}})^n\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，即 $e\approx\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. 这正是我们把它定义为 n 趋于无穷时的极限的缘由.

e 跟我们探索数王国的奥秘、在其中寻找形形色色的数有什么关系呢？当数学家们开始问 e 和 π 到底属于什么类型的
85】数时，他们居然发现了全新的一整类数.

观察 π 和 e

若我们有一个一次多项式方程 $ax+b=0$，其中 a 和 b 是有理数，那么 x 的解永远是有理数，因为 $x=-\frac{b}{a}$. 事实上，任何一

个有理数都是某个一次多项式方程的根.我们已经知道,高次多项式的根可能是有理数,也可能是无理数.我们定义系数为整数的多项式的解为代数数.更确切些,我们可以说所有系数为有理数的多项式的解为代数数.这是因为对于任何一个以分数(有理数)为系数的多项式方程,我们都可以找到一个整数,用它乘以方程两边就能将其变为系数都是整数的多项式.例如方程 $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=0$,通过方程两边同乘以整数6,它就变为整系数多项式方程,即 $6\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)=6\cdot0$,亦即 $6\cdot\frac{1}{2}x+6\cdot\frac{2}{3}=0$,最后得到 $3x+4=0$.

方程 $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=0$ 和方程 $3x+4=0$ 有相同的解,即 $x=-\frac{4}{3}$.因此,对任一以分数(有理数)为系数的多项式方程,我们都可将其变为整系数的多项式方程,而让解保持不变.这意味着:自然数、分数、和根式 $\sqrt{n}$ 都是代数数,因为它们都是那种多项式的根.

定义:代数数是这样的数,它是系数皆为整数的多项式方程的根.

1748年,欧拉最先提出 e 和 π 是否是代数数的问题.即,它们是否能成为整系数多项式的解.这个问题对于 π 有特殊的意义.在古希腊,人们就提出了一个当时无法回答的问题:是否能够仅仅用直尺和圆规作一个正方形,使其与某个给定的圆具有相同的面积.圆面积由公式 πr^2 给出,其中 r 是圆的半径.如果我们用 $r=1$ 作为圆半径,那么圆面积就是 π.为了作一个面积为 π 的正方形,我们必须作出长度为 $\sqrt{\pi}$ 的线段,用它作成的正方形就具有我们所要求的面积.

【186】

这个问题称作"化圆为方"问题,在过去的两千年间,有无数业余和专业的数学家试图去解决它.如果我们只使用直尺和圆

规,那么我们能对跟圆相联系的长度所做的运算只有乘法、加法、减法和除法这四种运算.这些也正是在标准的多项式中所使用的四种运算.因此,如果 π 是一个标准多项式的解,即如果 π 是一个代数数的话,那么化圆为方有可能成功.换句话说,如果 π 是代数数,则可以化圆为方①,否则将不能.

如果 e 和 π 不是代数数,他们又是什么呢?数学家称非代数数为超越数.然而,当欧拉首次提出这一问题时,人们还不知道这种数是否存在.尽管该问题在 1748 年首次提出,但直到 1844 年欧拉已去世多年后才获得解答.这一年法国数学家约瑟夫·刘维尔(Joseph Liouville, 1809—1882)构作了第一个被证明是超越数的数.他的数是

$$L=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\frac{1}{10^{4!}}+\cdots,$$

$$\text{或 } L=\frac{1}{10}+\frac{1}{10^{2}}+\frac{1}{10^{6}}+\frac{1}{10^{24}}+\cdots.$$

它写成小数形式为 $L=0.110\,001\,000\,000\,000\,000\,000\,001\,00\cdots$.刘维尔证明了这个数不可能是任何一个整系数多项式的解,因此它是个难以捉摸的超越数.然后他又说明如何构作出下列形式的无限多个超越数:

$$\frac{a_1}{10^{1!}}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots,$$

其中不同的 a_i 是取值范围为 0 到 9 的整数.这种数称为刘维尔数.这样就一劳永逸地解决了超越数确实存在的问题.但仍然无人知道像 π 和 e 这样的数的性质;它们到底是超越数还是代数数?最后,1873 年夏尔·埃米特(Charles Hermite, 1822—1901)证明了 e 是超越数.1882 年费迪南德·林德曼(Ferdinand von

---

① 作者的这一说法不妥,因为并非所有的代数数皆可用圆规直尺作图.代数数只是可规尺作图的一个必要条件而非充分条件.——译注

Lindemann, 1852—1939)证明了 π 是超越数. 这就彻底解决了 [187] 化圆为方的问题,证明它是不可能做到的.

现在我们知道 π, e 和刘维尔数是超越数. 还有没有其他的候选者? 指数方程和对数方程一般都有超越数的解. 但试图去证明一个特定的解是代数数还是超越数仍是件令人生畏的工作. 由 e 和 π 构成的其他一些组合形式也仍然是个谜. 我们虽已证明 e^{π} 是超越数,但 e^{e}, π^{π} 或 π^{e} 是超越数还是代数数,至今仍不得而知. 此外某些像 $e+\pi$ 和 $e\pi$ 这样简单的表达式也仍然是个谜.

我们现在已经知道一大类指数形式的数是超越数. 1934 年,俄国数学家亚历山大·奥西波维奇·盖尔芳德(Aleksander Osipovich Gelfond, 1906—1968)证明了所有形如 a^{b} 的数也是超越数,其中 a 为不等于 0 和 1 的代数数, b 为无理代数数. 这一成果现在称为盖尔芳德定理(或称盖尔芳德—施奈德定理,因为特奥多尔·施奈德(Theodor Schneider)在 1935 年也独立地证明了此定理). 这个定理意指如 $3^{\sqrt{7}}$或$(\sqrt{6})^{\sqrt{5}}$这样的数是超越数,因为底(3 和$\sqrt{6}$)是非 0 非 1 的代数数,指数($\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$)是无理代数数. 不幸的是这一结论对我们确定 e^{e}, π^{π}, π^{e} 的性质没有帮助,因为此时的底和指数都已经很清楚都是超越数,不满足盖尔芳德定理的条件.

从盖尔芳德定理我们可以导出像 log2 这样的数必是超越数. log2 等于一个幂次,使 10 的该幂次恰好等于 2,因此我们有 $10^{\log 2}=2$. 我们可以证明 log2 是无理数. 我们使用反证法:假设 log2 是有理数,就是说存在两个整数 p 和 q,使得 $\log 2=\frac{p}{q}$. 从定义可知 $10^{\log 2}=10^{\frac{p}{q}}=2$. 将等式两边都升高 q 次幂,得到 $10^{p}=2^{q}$. 注意 10 是 2 和 5 的乘积,即 $(2\cdot 5)^{p}=2^{q}$,或 $2^{p}\cdot 5^{p}=2^{q}$.

现在出现两种可能. 如果 p 大于 q,我们得到 $2^{p-q}\cdot 5^{p}=1$,这显然是错的. 如果 q 大于 p 呢? 这时消去 2^{p},得到 $5^{p}=2^{q-p}$.

188】这也是不可能的,因为所有的合数都有其唯一的因子分解.换句话说,不存在这样的数,它又能写成 5 的整数次幂又能写成 2 的整数次幂.因为 2 的任何整数次幂都是偶数,而 5 的任何整数次幂都是奇数(且个位数总是 5).由此立刻可知这种数不存在.总之,我们不能将一个 5 的幂次表示为 2 的幂次.因此上面假设的 p 和 q 是不存在的.即 log2 是无理数.

好,如果 log2 既是无理数,又是代数数,那么从盖尔芳德定理可知 2 是超越数,因为 $10^{\log 2}=2$.但 2 是有理数,所以 log2 必定既是无理数又是超越数.同样的推理适用于任何的 $\log x$,其中 x 是有理数且 $\log x$ 是无理数.这个条件对绝大多数的 x 的值都是满足的.因此,几乎所有的对数都是超越数.另一方面,标准的三角函数的值一般都是无理数,它们又是代数数但非超越数.

超越数有多少?

我们知道了存在很多超越数.实际上,存在着无限多个超越数.超越数是否比代数数更多呢?谈论一个无限的数集比另一个无限的数集大或小有没有意义?为了回答这些问题,人们开辟了一条有关无限这一数学思想的全新大道,我们会慢慢地看清关于无限的令人吃惊的性质.

人类所接触的第一个无限集是自然数的集合.如果我们要想对无限性有所领悟,那么从理解自然数开始是最好的途径.当两个有限集有同样的基数时,我们说其中一个集合可以一对一地映射到另一个集合之上.若在这种映射下任一集合中都没有一个元素被丢下,那么它们必有相同的基数.我们讨论无限集时

189】将使用同一原则,用映射来比较它们的大小.

定义: *若 A 和 B 是两个无限集,并且 A 的所有元素可一对一地映射到 B 的所有元素上,则称 A 和 B 具有相同的基数(或称具有相同的势).*

因为 A 和 B 这两个集合都是无限的,我们不能使用有限数

作为他们的基数.我们最终发现使用某种特殊的符号来表达无限集的基数是必要的.

任一无限集如果可被一对一地映射到自然数的集合上,我们称它为可数集.可数集有一些值得注意的性质.伽利略(Galileo Galilei,1564—1642)是一位极负盛名的科学家和数学家.他改进了望远镜,发现了木星的卫星、太阳的自转和太阳黑子等.他还发现了摆的定律,证明了自由落体有同样的加速度.在伽利略 1636 年[①]出版的《关于两种新科学的对话》一书中,他指出无限集的一个很奇怪的性质.[2]他演示了可以将自然数一对一地映射到由自然数的平方组成的集合上.具体的映射方式为:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	…

每个自然数只映为一个平方数,每个平方数也仅被映为一个自然数.这样,我们便有了一对一的映射.每个自然数和每个平方数都用到了,一个也没少.由此,我们得到了令人吃惊的结论,即平方数与自然数一样多!自然数是可数的(或可计数的),任何其他集合只要能一对一地映射到自然数集上,则该集合也是可数的.

初次听到这一结论时,我们会情不自禁地高举双手并宣称说:这里一定有错.平方数的集合中少了那么多的自然数,怎么可能跟自然数一样多呢?我们直觉地感到自然数比平方数要多得多.但根据我们上面给出的定义,这两个数集有相同的基数,【190】在"大小"上是相等的.这个小小的例子已点明了可数的无限集合值得注意的特征.我们还可以用同样的办法将所有的正负数跟自然数作成如下的映射:

① 据大英百科全书,此书出版年代为 1634 年.——译注

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 …

↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕

0 1 −1 2 −2 3 −3 4 −4 5 −5 …

此时，我们再一次得到一个一对一的映射，将所有的整数跟所有的自然数相对应．因此，自然数和整数一样多．事实上，我们有下列这个漂亮的定理．

定理： *每个可数的无限集跟自然数有相同的基数．*

说得明白些，这个定理的意思是：当谈论可数无限集的大小时，所有的这种集合都有同样的大小，即有同样的基数．此定理蕴涵着一个结论：可数集的任一无限子集与原来的集合有同样的大小．这一概念使我们感到有点好玩，因为有限的数集所具有的性质不再为无限的数集所保持．例如，我们如果在 10 上加 1，会得到比 10 大的数．但，若在无限集上加 1，我们不会得到更大一点儿的集合，得到的只是跟原来的同样大小的集合．因此，若 A 是一个无限集的基数，那么 $A+1=A$．这看起来像是完全错了，因为根据我们的日常经验，将某个对象加到一个汇集中，这个汇集应变得大一些．但我们必须认识到，我们正在讨论的是无限集，它们的性状并不总是跟有限集一样的．如果你一定要将这两种性质协调在一起，你可以想像在一个无限集合上加上 1（或任何有限数），对于改变它的大小来说太微不足道了．要真正改变一个无限集的大小，就必须作出某种无穷的变化．你要是对有限集加入无限集并不改变后者的大小这一结论感到迷惘的话，你并不孤立．数学家也被这种想法困扰了几十年．当我们谈论无限集合的大小时，要记住我们是用映射的术语来定义大小的．使用映射的概念我们才能看清楚无限集真的可能是有不同的大小91】的，但此时的差别不是有限的，而是无限的．

现在我们使用一种映射的办法来导出一个最为令人惊奇的数学结论．我们知道任一可以一对一地映射到自然数集上的无限集都跟自然数集有同样的基数．有多少有理数呢？我们能够

将所有的有理数映射到自然数上吗？乍一看来，似乎有理数集比自然数集大得多．在自然数 1 与 2 之间就存在着无限多个有理数．我们可以推而广之，在任何两个自然数之间都存在着无限多个有理数．这两个集合怎么可能有相同的基数呢？

现在考虑表 8，我们把所有的有理数放在一个方阵中．这个方阵包含无限多的行和列，并列出了所有的有理数．道理很清楚，因为所有的有理数都具有$\frac{p}{q}$的形式，其中 p 和 q 都是整数．我们从左上角开始经过所有的有理数，并消去重复的，于是得到表 9 中的方阵．方阵中的箭头表示经过有理数的路径，以及所消去的重复的数．确定该消去的重复的数不是太困难．如果某分数已约减到最简程度，我们就保留它，否则就消去它．所有的正有理数都出现在这个方阵中．如果我们想要找到$\frac{p}{q}$（假定它已化为最简分数）我们只要从第 p 行中找出位于第 q 列的元素就行了．这样，所有正有理数都被包括在内了．我们现在可以将这些数一一对一地映射到自然数上，顺序如下：【192】

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \end{array}$$

你可能会说这儿只列出了正有理数．是的，但我们可以对负有理数构作同样的方阵，然后将 0 当作第一个元素，并交错地从正有理数与负有理数方阵取数，于是得到

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{1} & -\frac{2}{1} & \frac{3}{1} & -\frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \end{array}$$

这就是我们所要的映射．每个有理数，无论是正的、负的还是零都包括在内，而且只出现一次，这就将它们映射到了自然数上．

表 8　有理数方阵

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	…
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	…
$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	…
$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	…
$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	…
$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	…
7 1	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	…
⋮								

表 9　有理数方阵

$\frac{1}{1}$	→	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	→	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{5}$	→	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{7}$	→	$\frac{1}{8}$	…
	↙		↗		↙		↗		↙		↗				
$\frac{2}{1}$		↗		$\frac{2}{3}$		↗		$\frac{2}{5}$		↗		$\frac{2}{7}$			…
↓	↗		↙		↗		↙		↗						
$\frac{3}{1}$		$\frac{3}{2}$		↗		$\frac{3}{4}$		$\frac{3}{5}$				$\frac{3}{7}$		$\frac{3}{8}$	…
	↙		↗		↙		↗								
$\frac{4}{1}$		↗		$\frac{4}{3}$		↗		$\frac{4}{5}$				$\frac{4}{7}$			…
↓	↗		↙		↗										
$\frac{5}{1}$		$\frac{5}{2}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{5}{4}$				$\frac{5}{6}$		$\frac{5}{7}$		$\frac{5}{8}$	…
	↙		↗												
$\frac{6}{1}$		↗						$\frac{6}{5}$				$\frac{6}{7}$			…
↓	↗														
$\frac{7}{1}$		$\frac{7}{2}$		$\frac{7}{3}$		$\frac{7}{4}$		$\frac{7}{5}$		$\frac{7}{6}$				$\frac{7}{8}$	…
⋮															

至此，我们得出了惊人的结论：自然数的基数跟全体有理数的基数相等．那么全体代数数组成的集合又如何呢？全体超越数又怎样呢？也许对于无限集合来说只有一种基数吧！

自从伽利略首次指出自然数与平方数之间的映射以来，数学家们一直在琢磨它究竟意味着什么．这个问题要等待将近250年，即到19世纪末才有了圆满的解答．

非凡的康托尔

我们下面所要探索的关于超越数的内容几乎全要归功于一个非凡的人，就是乔治·康托尔(Georg Cantor)(图43)．他的生平既迷人又很悲惨．他1845年3月3日生于俄国的圣彼得堡．他的父亲乔治·沃尔德曼·康托尔(Georg Woldeman Cantor)是一名丹麦商人；他的母亲名叫马丽亚·伯姆·康托尔(Maria Bohm Cantor)．1856年当康托尔11岁时，他们全家搬到了德国黑森州莱茵河畔的法兰克福，老乔治从此不再受俄国严冬的煎熬．小康托尔在15岁时表现出了很强的数学才能，进入了达姆施塔特(Darmstadt)的大公国高等技术学校学习．他按照父亲的要求在那儿注册学习工程学．1863年，他进入柏林大学，在这儿他选学了数学、物理、哲学．他是一个热诚的年轻人，这种性格是双亲遗传给他的．

当时在柏林大学数学系教书的是两位伟大的数学家，卡尔·维尔斯特拉斯(Karl Weierstrass，1815—1897)和利奥波德·克罗内克(1823—1891)．这两位著名人物对康托尔的一生起了决定性的作用，前者是好的作用，后者则起了坏作用．维尔斯特拉斯将成为康托尔的支持者，而克罗内克却终生都在跟康托尔的思想进行战斗．

1867年，康托尔以优异成绩从柏林大学毕业并得到博士学位．他没能找到与他的能力相称的大学职位，于是接受了在一所私立学校给女孩子讲数学的工作．1869年，康托尔在一所不大

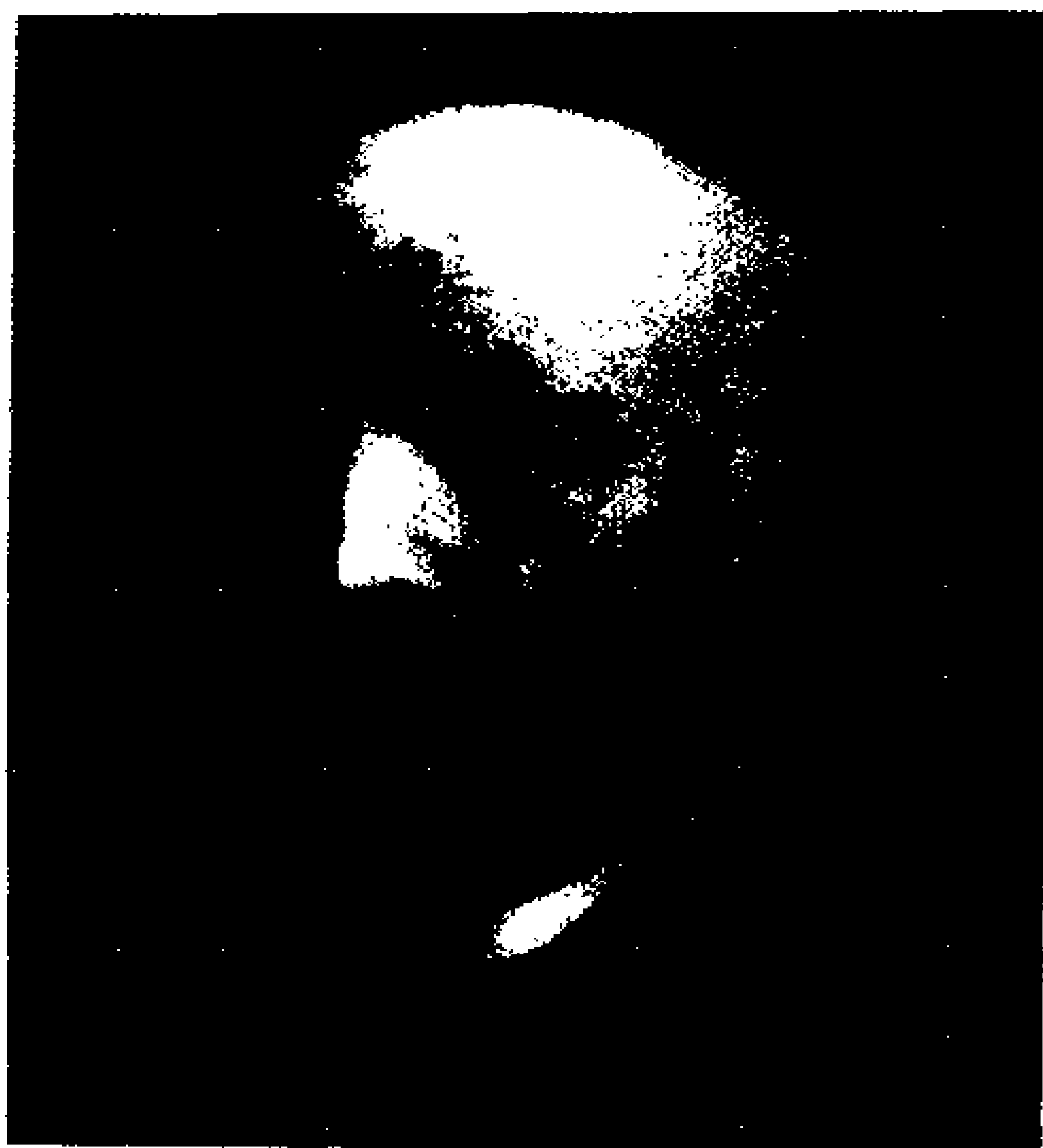


图 43 乔治·康托尔,1845—1918.(布朗兄弟出版社,斯特灵市,宾夕法尼亚州)

的哈雷大学中找到了一个职位——仍然跟他在柏林大学所受的
[14] 良好训练不相称.

然而,他还是在哈雷大学安下身来,1872 年成为那里的助教.就在那一年,康托尔遇见了另一位年轻的德国数学家,两人成了朋友;那人的名字叫理查德·戴德金——正是那个给出无理数的现代定义的数学家,他遇见康托尔那年出版了他那篇著名
[15] 的文章.这样两位在 19 世纪末对数学做出如此重大贡献的数学

家变成了亲密的朋友，他们彼此交流，互相支持.

代数数是可数的吗？

代数数包括所有的有理数①以及那些可以作为多项式的根的无理数.代数数的集合是可数的吗？这似乎是个十分困难的问题，但康托尔却很轻松地解决了它.他通过代数数所满足的多项式，在代数数中引入了一种次序.

康托尔给每个多项式确定一个整数，他称之为多项式的高，记作 H.我们记得，多项式的形式为 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}\cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$.我们用以下方式定义它的高：首先算出 $n-1$，它等于多项式中 x 的最高幂次减 1，然后把它加到所有系数的绝对值上.所谓绝对值意指无论这个系数在多项式中是正还是负，我们都只取其正值.于是，多项式的高为 $H = (n-1) + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$.这里的系数用竖线括起来就叫做它们的绝对值.例如，简单的多项式 $x+1$ 的高为 2，因为 $a_0 = 1$，$a_1 = 1$，且 $n = 1$，于是 $H = (1-1) + 1 + 1 = 2$.我们立刻可以看出，对每个 H 的值，我们只可能有有限多个多项式与之对应.表 10 给出了前三个 H 的值对应的多项式.

对于 $H = 1$，我们只有一个多项式 $x = 0$.H 是 2 时，我们有四个与之对应的多项式.当 $H = 3$ 时有十一个不同的多项式.因此，相应的多项式个数随着高度的增加也在快速地增长.然而，对任何一个具体的 H，相应的多项式只有有限多个.现在我们要运用高斯的著名定理——代数基本定理.它说每个多项式方程至少有一个解(或根).这个定理的一个推论是，一个多项式方程的解的个数是固定的.例如，多项式 $x^3 + 2x - 5 = 0$ 有三个解，而多项式 $x^2 - 7x + 1 = 0$ 有两个解.对于表 10 中的每个多项 【196】

① 事实上，前文已经说明任何一个有理数都是某个系数为整数的一次多项式方程的根.——译注

式,我们可以写出它们的解,并删去重复的.这样,对每个 H 及其所对应的多项式集合,其非重复的解(或者说代数数)的个数是固定的.

从表 10 中可以看到:对于 $H=1$,只有一个非重复的解,即 0.对 $H=2$,我们得到两个解,$x=1$ 和 -1. $H=3$ 时,我们得到六个非重复的解. 此刻我们先不讲$\sqrt{-1}$和$-\sqrt{-1}$是什么类型的

表 10 多项式的高度

高度	多项式	唯一解
1	$x=0$	0
2	$x+1=0, x-1=0, 2x=0, x^2=0$	$-1, 1$
3	$x+2=0, x-2=0, 2x+1=0,$ $2x-1=0, 3x=0, x^2+1=0,$ $x^2-1=0, x^2+x=0, x^2-x=0$ $2x^2=0, x^3=0$	$-2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$

数(以后我们会讲).现在我们可以将这些非重复的解按如下方式映射到自然数集合上了.

0	-1	1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{-1}$	$-\sqrt{-1}$
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
1	2	3	4	5	6	7	8	9

在上述映射中,每个代数数都考虑进去了,因为每个多项式都有一个相应的 H 值.对应于那个 H 值又有确定的一些代数数被映射为自然数.从这种一对一的映射中,我们认识到(正如康托尔所说的)代数数必定是可数的.现在我们要问:能否找到一个无限集合,它是不可数的呢?

超越数有多少?

康托尔此时已准备提出他一生中最重要的问题:超越数是

可数的吗？他实际上提的问题是：实数是否可数——实数包括 [197
代数数和超越数.如果超越数和代数数都是可数的，那么它们合在一起就是可数的.1873 年 11 月 29 日，康托尔在给他的朋友戴德金的信中写道：

> 我可否问你一个问题，对我来说它具有理论上的兴趣，但是我却不能回答它；也许你能回答它，并会慷慨地将答案写给我.问题是这样的：取所有自然数 n 的集合，记为 N.进一步考虑所有正实数的集合，记为 R.问题很简单，即：N 能不能与 R 配对，使得一个集合中的每一个元素对应于另一个集合中的一个且仅仅是一个元素.粗粗看去，人们一定会对自己说："不成，这是不可能的，因为 N 是由离散的部分构成的，而 R 是连续的."但这种反对意见什么也没有证明.我强烈地感觉到 N 和 R 不容许这种配对，但一直没有找到理由.这个问题一直困扰着我；也许它是很简单的.[4]

这里，康托尔略去了负实数，他这样做无碍大局.如果他能找到将所有正实数映射到自然数上，那么，用同样的技巧，他就能把所有负实数都包括进来.戴德金回信给康托尔说，他不知道康托尔问题的答案.1873 年 12 月 7 日，仅仅在康托尔发出第一封信的八天之后，康托尔又写信给戴德金.

> 最近我有较多的时间来考虑我跟你提到的猜想；就在今天，我相信我完成了这件工作.我怕自己会想错了、你又是最宽厚的评论家，我便自作主张地将我写好的东西，包括所有最初的草稿交给你审阅.[5]

在仅仅一周多一点的时间内，康托尔就获得了他生命中的

这一发现，即实数是不可数的，因为实数实在是太多太多了．实际上，他有两个证明．第一个是在 1873 年 12 月提交给戴德金并在 1874 年出版的证明．[6]第二个证明非常巧妙地利用了小数系统，你可以在集合论的大多数课本中找到它．两个证明都很漂【198】亮，但第一个看来更精致．

在第一个证明中，康托尔使用希腊人引进的反证法，或称间接证明法（前面我们已经遇到过）．他首先假定正实数可以一对一地映射到自然数上，然后由此导出矛盾．如果正实数集合是不可数的，当然所有正实数加上负实数也是不可数的．这个证明也足以用来证明超越数是不可数的，因为所有其他种类的实数都是可数的．如果所有实数组成的集合不可数，那必然是由于超越数的缘故．

如果我们假定正实数是可数的，则至少存在它与自然数之间的一个映射；假定这样一个映射是由下面的序列给出的，其中每个 ω（希腊字母，读音近似于"欧米嘎"）都是正实数：

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \omega_4,\quad \omega_5,\quad \omega_6,\quad \omega_7,\quad \omega_8,\quad \omega_9,\quad \cdots$$

在上面的序列中，ω 的脚标表示它被映射到的那个自然数．根据康托尔的假定，上面这个序列包含所有的正实数．

我们取实数直线上的一个线段，并将端点标为 α 和 β．我们选取哪两个数作为线段的端点毫无关系．我们所假定的只是 α 和 β 是不同的数．我们随意地认定 α 是两数中的较小者，所以 $\alpha<\beta$．因为所有的实数都包含在我们的序列中，因此在 α 与 β 之间的实数也必在其中．我们沿着序列移动直到遇见落在线段 (α,β) 中的两个数．我们称它们为 ω_a 和 ω_b．为了便于推理，我们将认为 $\omega_a<\omega_b$．从我们序列中选出的这两个数，在我们上述的第一个线段内又确定了另一个线段（图 44）．现在我们再继续沿着序列找出另两个数，这次要求它们在 ω_a 和 ω_b 之间，我们称这两个新数为 ω_c 和 ω_d．这两个新数在线段 (ω_a,ω_b) 之内并确定了第三个线段．你可以看出，这个过程可无限地继续下去，每次我

们在已有的线段中找到两个数以确定一个新的线段，继而我们又能利用这个线段去确定另一个线段. 图 44 展示了其中的前几个线段. [199]

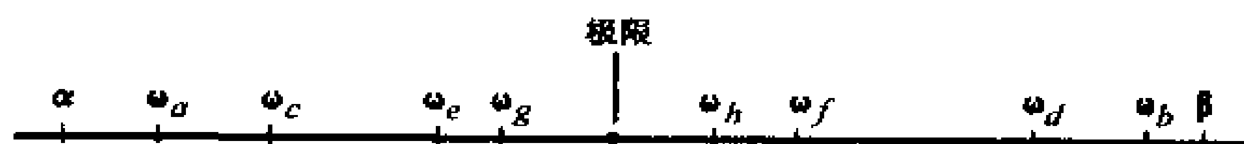


图 44 康托尔关于实数不可数的第一个证明. 如果 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ 是实数的可数序列，则能够构造出一种区间套的无限集合（$\{\omega_a, \omega_b\}$，$\{\omega_c, \omega_d\}$，$\{\omega_e, \omega_f\}$），它必有一个不属于这个序列的极限点. 因此，不存在可数的序列能包含所有的实数.

在上述过程进行中，可能出现两种情况. 第一，我们可以假定这个过程停止了. 此时，我们再也找不到另外两个数能塞进我们的最后一个区间. 但这会导致矛盾，因为我们知道在任意两个实数之间都存在另一个数. 事实上，我们还可以进一步说：在任意两个实数之间存在无限多个实数. 因此这第一种情况不可能发生. 无论我们作多少次，我们都会得到越来越短的线段，一个套住一个. 我们可以继续不断地在实数序列中找到另外两个实数落入上一个线段的内部.

因此，我们遇到的必是下述第二种情况：我们能够确定无限多个线段，每一个都在另一个的内部. 换句话说，这些线段将有无限多个端点（数），它们包含在最初的线段（α, β）内. 此时康托尔在他的证明中应用了一个定理. 这个定理是由 19 世纪的两位数学家发现的，他们是捷克斯洛伐克的牧师伯恩哈特·波尔查诺（Bernhard Bolzano，1781—1848）和康托尔在柏林大学时的那位老师卡尔·维尔斯特拉斯. 我们知道是维尔斯特拉斯在 1865 年——波尔查诺去世后很久，给出了波尔查诺—维尔斯特拉斯定理的证明，不过，该定理所涉及的基本思想是同时属于这两位的. 下面就是康托尔所要用到的波尔查诺—维尔斯特拉斯定理.

波尔查诺—维尔斯特拉斯定理：设 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是一个增长的数列，这些数是有界的，即存在一个数 B，它比任何一个 x 都大．则该数列存在一个极限 L．

当我们观察从正实数序列中确定的线段的无限汇集时，我

200】们立刻看到线段的左端点构成了一个新的数列，它是无限增长的数列，有上界 β．因此，在 α 和 β 之间存在一个数列的极限点 L．这个数列其实很简单，即 $\alpha, \omega_a, \omega_c, \omega_e, \cdots$ 这些点都在原来的 ω 的序列中出现．L 是什么类型的数呢？它不可能是我们的实数序列 $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \cdots$ 中的一个元素，因为如果它在这个数列中的话，那么在寻找用以确定新的线段的数时，我们最终一定会遇见它，这样一来 L 就将变成某线段的一个端点．这个说法你得花点时间细细地体会一下．如果 L 真是在那个实数序列中，那么它将被映射到某个特定的自然数 n 上，并以 n 作为脚标．当我们从原有线段出发来找寻新线段的连续不断的过程中，在第 n 步将得到 L_n，因而 L 成了我们的线段的一个端点，那它就不是极限点了．

于是，由于 L 不可能在 ω 数列之中，同时它又是极限点，那么我们就得到一个实数(因为 L 是数线上的一个数)，它不包括在 ω 序列中．因此，序列 ω 并没有包含所有的正实数．这个矛盾就证明了没有一个实数序列到自然数的一对一的映射是完全的．实数的可数性就被排除了．因此，实数的基数比自然数(或有理数，或代数数)的基数"大"．

第二个证明

康托尔于 1873 年给出的关于正实数是不可数的第一个证明很简捷，只用到了数的映射概念和波尔查诺—维尔斯特拉斯定理．他若干年后给出的第二个证明要依赖于十进小数系统．这个证明本质上与第一个相同，也是用反证法，即假定在实数与自然数之间存在一对一的映射．但此时需假定我们的数都表为十

进小数形式.此外我们还要假定只对 0 到 1 之间的实数作映射.一旦能证明 0 与 1 之间的实数不可数,自然全部实数更是不可数的了.

【20

好,现在假定我们已将所有 0 与 1 之间的实数排列好并以下述方式跟自然数实现一一对应:

$$1 \leftrightarrow 0.179\ 203\ 840\ 982\ 7\ldots$$

$$2 \leftrightarrow 0.375\ 550\ 000\ 000\ 0\ldots$$

$$3 \leftrightarrow 0.000\ 178\ 834\ 544\ 1\ldots$$

$$4 \leftrightarrow 0.499\ 878\ 333\ 333\ 3\ldots$$

$$5 \leftrightarrow 0.845\ 596\ 792\ 873\ 9\ldots$$

$$\vdots$$

当然,这个表可以无限地排下去,因为有无限多的自然数和无限多的 0 与 1 之间的实数.表中有些实数是有理数,其形式是有穷小数或循环小数;另一些是无理数,即非循环小数.我们的假设是:所有 0 与 1 之间的实数都已排列在这个表内.

为了证明有矛盾,我们要做的唯一一件事情就是去构造一个 0 与 1 之间的实数,使它不在上述这个表中.我们怎样来构造这个数呢?在小数点后第一个小数位上我们选取一个数字,它跟与 1 相对应的那个数中的第一位数字不同,即我们选取一个跟 1 不同的数字,譬如我们可以选 3,即我们构造的小数以 0.3…为开端.选第二位小数时要注意表中的第二个实数,我们要取一个与第二个实数中第二位不同的数字,因此要选一个不同于 7 的数字,我们选 4.此时我们所构造的数形如 0.34….我们继续这种构造方式,选取第 n 位小数的数字时总要与第 n 个实数的第 n 位数字不同.这个数构造好了之后,我们立刻可以看出它不是表中所列的任何一个数.为什么?假定谁宣布说表中第 n 个实数就是我们构造的数,那么我们马上可以说这第 n 个

数的第 n 位小数必与我们构造的数的第 n 位小数不同. 因此上面这张实数表是不完全的，正如前一个证明中的序列是不完全的一样. 这就是说实数实在太多太多了，根本不可能一对一地映射到自然数上. 我们得到了一个优美的定理，它归功于康托尔. 它美在什么地方？美在如此简捷，又如此有效.

定理 由所有实数组成的集合是不可数的.

康托尔对自然数集的基数和实数集的基数都给出了特别的名字. 自然数(或者说所有的可数集)的基数为 $\aleph_0$——这是希伯莱文字母表中的第一个字母 $\aleph$(读作 aleph)加上下标 0 组成的. 他把实数集的基数命名为 $\aleph_1$. 真要感谢康托尔，我们才发现了关于数的深刻的真理. 我们知道所有自然数组成的集合，所有分数组成的集合和所有代数数组成的集合都具有同样的基数 $\aleph_0$. 但数线上的其他数——超越数有大得多的稠密度，它们形成了有 $\aleph_1$ 个元素的集合.

我们不妨仔细思量一下，当我们说超越数不可数时意味着什么？考虑我们定义过的超越数 e. 我们说过 $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，因此描述 e 只须要使用有限个符号. 是否所有的超越数都能用某个有限的符号集来定义或描述呢？答案是不能. 否则的话，我就可以把所有这些有限的符号集排成一个可数集合，于是我们就可以使用这有限个符号作成某种类型的映射，将超越数映到自然数集上，那么超越数就是可数的了. 上面的论证可导致一个奇怪的结论，即必存在多到不可数的超越数，我们竟不能用有限多个符号来描述之. 因此必存在多到不可数的一大堆数，我们从未去描述过它们. 这是否意味着存在一些独特的数是无法描述的呢？也不一定. 特殊的数总是可以去研究的，我们希望它们能用有限的符号集来描述，并能列入我们已描述过的超越数的可数的表格之中.

在$\aleph_0$和$\aleph_1$之间还存在别的东西吗?

如同数学中发生的大多数情形一样,我们刚解答完一个问题,便会冒出更多问题要求解答.一旦康托尔证明了存在两种不同的无限集$\aleph_0$和$\aleph_1$,人们紧接着就会问在两者之间是否还有别的无限集存在.即,是否存在一个无限集,往自然数上映射的 [203] 话它太大,而往实数集上映射时又显得太小?这个问题已成为著名的**连续统假设**(continuum hypothesis).康托尔不相信有这样的集合存在,但未能给出证明.这个问题直到1963年才有了答案.在这一年,年轻的数学家保罗·科恩(Paul Cohen,1934—)证明这个问题是不可判定的.说一个问题不可判定是什么意思呢?日常生活中,我们在问一个问题时只会想到"对"或"错"两种答案,二者必居其一.但在研究数学问题时,不一定如此.逻辑学家们喜欢从一组被认为是真理的公理出发来构造各种不同的数学领域.当年欧几里得在发展他的演绎几何学时就是如此.他不加任何证明地提出一些断言,并认为这些断言在直观上是正确的,然后他利用这些断言演绎出几何定理.

这跟不可判定性(undecidability)有什么关系吗?欧几里得的第五公设说,对于任何一条直线及直线外一点,有且仅有一条通过该点且与原直线平行的直线(图45).在很长一段时期里,数学家们认为这条公设不是不证自明的,它应该能从别的公设和公理推导出来;但是他们推导第五公设的所有尝试都失败了.我们现在知道想从别的公设和公理推导出它是不可能的,这意味着欧几里得的第五公设跟连续统假设处于同样的状态——它 [204] 们都是不可判定的.所以,如果你想要的是含有第五公设的几何学,你就必须视其为一条无须证明的陈述(公设).

康托尔所发展的集合论称作朴素集合论,它奠基于集合的直观性质.现代集合论则是由两位数学家恩斯特·策梅罗(Ernst Zermelo)和阿道夫·弗伦克尔(Adolf Fraenkel)基于一组公理发展

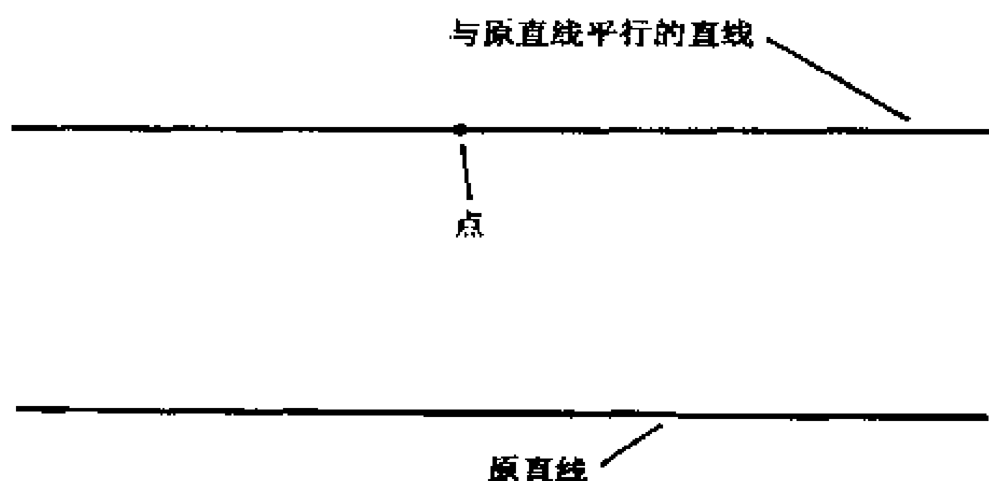


图 45　欧几里得第五公设.给出一条直线和直线外一点,有且仅有一条过该点的直线与原来的直线平行.

起来的.这些公理现在称为策梅罗—弗伦克尔公理,或简称为 ZFC.我们从 ZFC 不能推导出连续统假设是真理的结论.如果我们想要让连续统假设成为数的理论的组成部分,就必须找到能保证它成立的公理并把这个公理添加到 ZFC 的公理之中.这就是说,存在着含有连续统假设和不含有连续统假设的两种版本的集合论.于是问题变成了:宇宙到底是怎样运作的? 对我们来说,是使用连续统假设为真的集合论更好写些呢,还是相反? 哪个更适合我们的需要? 此刻我们并不知道问题的答案.

可数集($\aleph_0$)与不可数集($\aleph_1$)的区别不是无足轻重的琐事.可数的数集——我们通常都将它等同于自然数集合——是人类最早认识和思考的无限集.为了理解生存空间的广度和与之相关的量,我们进行了长期的努力,其间又邂逅了另一种不同的无限集$\aleph_1$($\aleph_1$有时也记为 c,英文中连续统这个词(continuum)的首字母).在数学中,我们需要研究这个更大的集合 c.而为了科学,我们又需要数学.我们可以简单地来说明$\aleph_0$和 c 是不同的:我们能够将可数无限多的线段置于数线上,使它们彼此不相交(图 46).但当我们试图将不可数无限多的线段置于数线上时,必定会有一些线段具有相重的部分.事实上,无限不可数

的数线段必定相重.[7)]

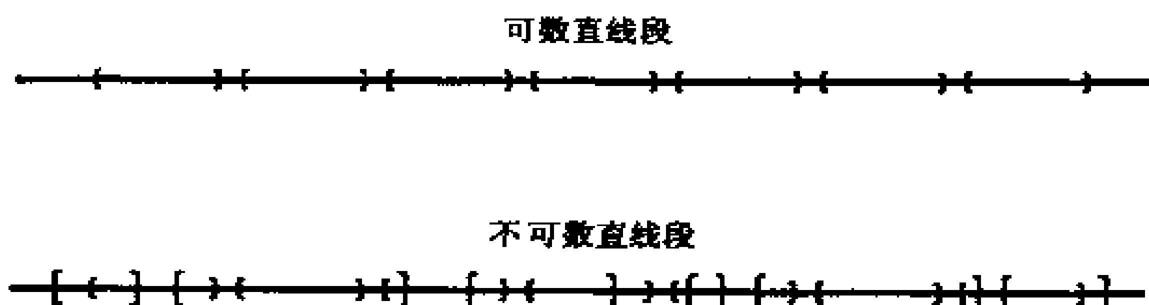


图 46 可数集与不可数集.在一无限的直线上,我们能够从容地放入可数无限多的线段.然而,在同一条直线上,不可能互不相重地放入不可数无限多的线段.

至此,我们已刻画了整条实数直线.它是由自然数、分数、代数数(它们都是可数的)以及有点生疏的超越数组成的,后者是不可数的.关于数,我们已经知道得不少了,难道还有必要去弄明白更多的东西吗? [206

第11章 数王国的扩张：复数

从表面上看，有关数的主要问题好像都解决了．我们已经在实数与数线上的点之间建立起了一一对应关系．我们已经熟悉了不同类型的实数．我们已经弄清楚了可数集与不可数集．我们还举出了很能说明问题的不可数集的例子——那些有点怪的超越数．还有什么可说的呢？

请回顾一下康托尔关于*代数数是可数的*之美妙证明，我们在那里遇见过一个奇怪的符号，不过当时故意没有去搭理它．这个符号就是$\sqrt{-1}$，它能以正的和负的两种形式出现．-1的平方根到底是什么？它必定是一个数，它的平方等于一个负数．但我们根据算术规则知道，如果有两个符号相同的数相乘，则得到的乘积一定是正数．因此求一个负数的平方也应得到正数，跟正数平方的情形一样．零的平方当然仍是零．看来在我们的数线上，没有一个实数在求平方之后会得出负的结果．

我们可能会想，把它扔到一边，忘掉算了．在很多个世纪中，数学家就是这么干的．然而问题并没有消失．我们偶然遇到的正的和负的$\sqrt{-1}$是多项式方程$x^2+1=0$的两个解．这是一个相当简单的多项式方程，它的两个解就是这种奇怪的负数开平方根，我们称之为负数方根．如果我们根本不承认$\sqrt{-1}$，那么这个多项式方程是无解的．更糟糕的是这种类型的解有很多．多项式$x^2+2=0$有两个解，它们是$\sqrt{-2}$和$-\sqrt{-2}$．这时我们必须找到一个数，使它的平方等于-2．我们突然领悟到，对任何一个实

数 r,因为有多项式方程 $x^2+r=0$,所以必定会出现 $-r$ 的平方根.在解这个一般的方程时,我们必须先将 r 移至方程式的右边,它应变为负的,然后求它的平方根.这意味着这种奇怪的负数方根跟实数一样多.我们还可以考虑稍复杂些的问题,比如方程$x^4+1=0$.我们在解这个方程时发现 $x=\sqrt[4]{-1}$,它表示这样一个数,当它乘以自身三次后等于 -1.因此除了平方根之外,还有开其他次的方根也跟这种奇怪的数有关.如果它们都不在数线上出现,又会呆在哪个鬼地方呢?它们真的存在吗?

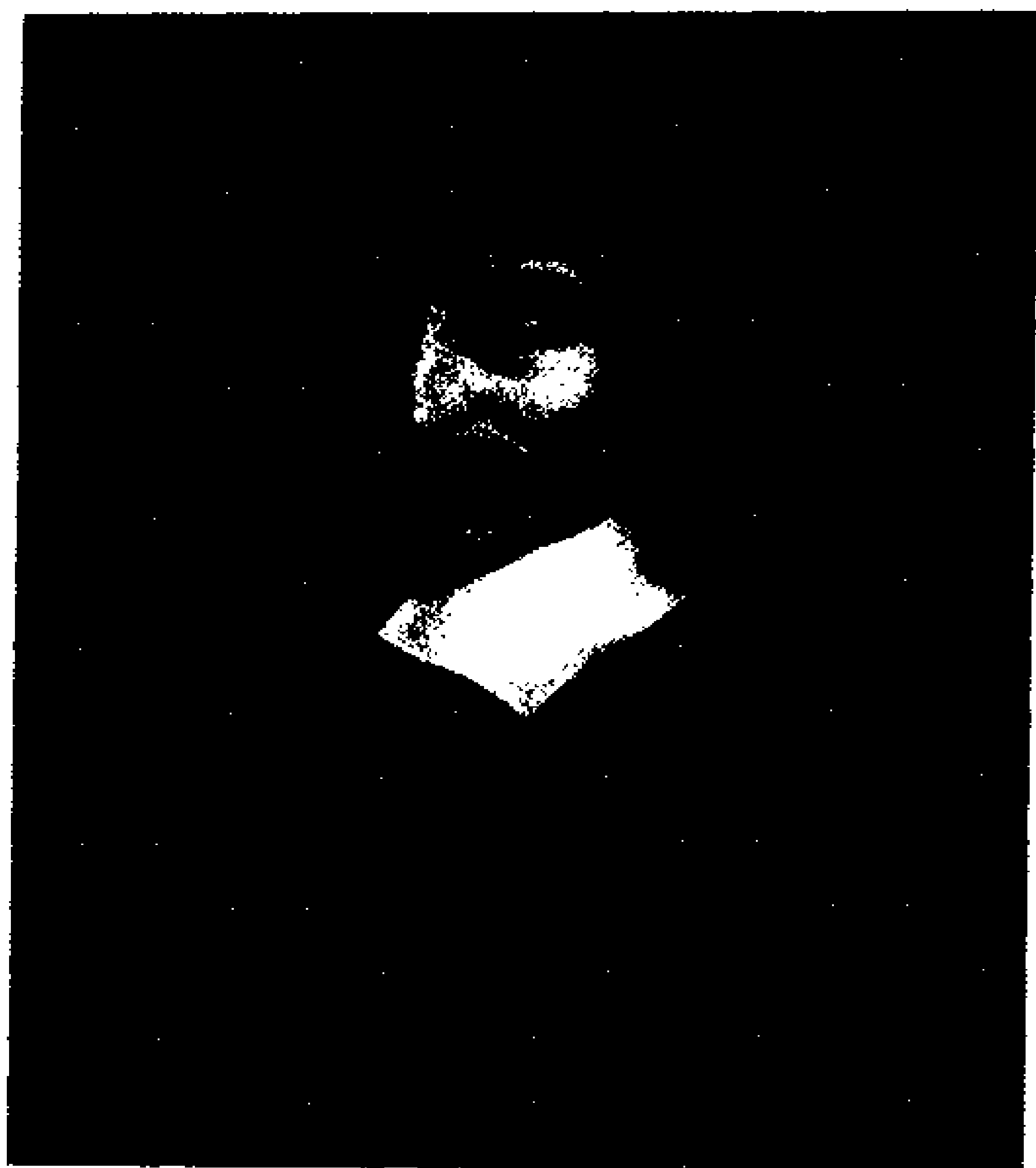
在很多世纪中,数学家根本不理会负数开根的问题.如果多项式方程仅有负数方根这种解,那么数学家们就断言该方程无解.古希腊伟大的代数学家丢番图完全拒绝把负数方根作为方程的根.[1]第一个考虑把负数的平方根作为多项式方程解的是阿尔贝特·吉拉尔,在 17 世纪几乎没有别的人同意他的这种做法.[2]在代数与几何得到重大的改造之前,这些奇怪的家伙很难在数学王国中有个安全的家.终于有两个人,就是我们提到过的笛卡儿和高斯,为它们在数学王国中安了家,笛卡儿提供了必要的工具,而高斯给出了最后的解答.

解析几何的诞生

笛卡儿(图 47)活着的时候绝想不到,他的工作会成为一类全新的数的基础.事实上,他本人拒绝将负数的平方根作为多项 【208】 式方程的解,并为这种根赋予了现在仍在使用的名称:虚数①(imaginary number).

笛卡儿 1596 年 3 月 31 日生于法国小城拉艾(La Haye)的一个贵族家庭.[3]因家庭富裕,他不必操心去工作,于是成了一个对赌博和女人感兴趣的典型的 17 世纪绅士.但他受过良好的

① 也可直译为假想的数.——译注.



[9] 图 47 笛卡儿，1596—1650.（布朗兄弟出版社、斯特灵市，宾夕法尼亚州）

传统教育．在他的青年时期，为了寻求欢乐而参了军，曾为几个欧洲王室作过战．但所有这一切掩盖了这样一个事实，即他是第一流的数学家和哲学家，甚至还花时间从事科学实验．他有一句为人熟知的生活格言"我思故我在"．他个人最有价值的贡献就是我们现在谈到的学科——解析几何．

据说，笛卡儿 23 岁在巴伐利亚军队服务时，有一天做了三

个奇怪的梦.他认为这是一个信号,要他放弃徒劳无益的生活方式,将生命贡献给数学、哲学和科学.他说在梦中获得了开启伟大的真理财富大门的魔钥.他从未泄露过魔钥指的是什么,但他的传记作者推测说这就是他的几何原理.

在古典希腊时期,由于发现对角线的不可公度性(即$\sqrt{2}$是无理数,它不能表示成分数),导致了代数和几何各自分道扬镳.代数讨论涉及数的问题,而几何研究空间的性质.笛卡儿把这两门学科再次拉回到了一起,他是用一种简单的作图法实现这一点的.首先,他取一条实数直线(虽然因时代尚早,他还未充分地认识这条线的丰富内容),将它按水平方向放置,然后他取第二条数线竖直摆放,使之与第一条线相交为直角(图 48).这两条直线都称为轴,两条直线的交点称为*原点*,并指定该点的值为 0.平面上的每个点可以用两个数定出位置:即它沿着水平方向与

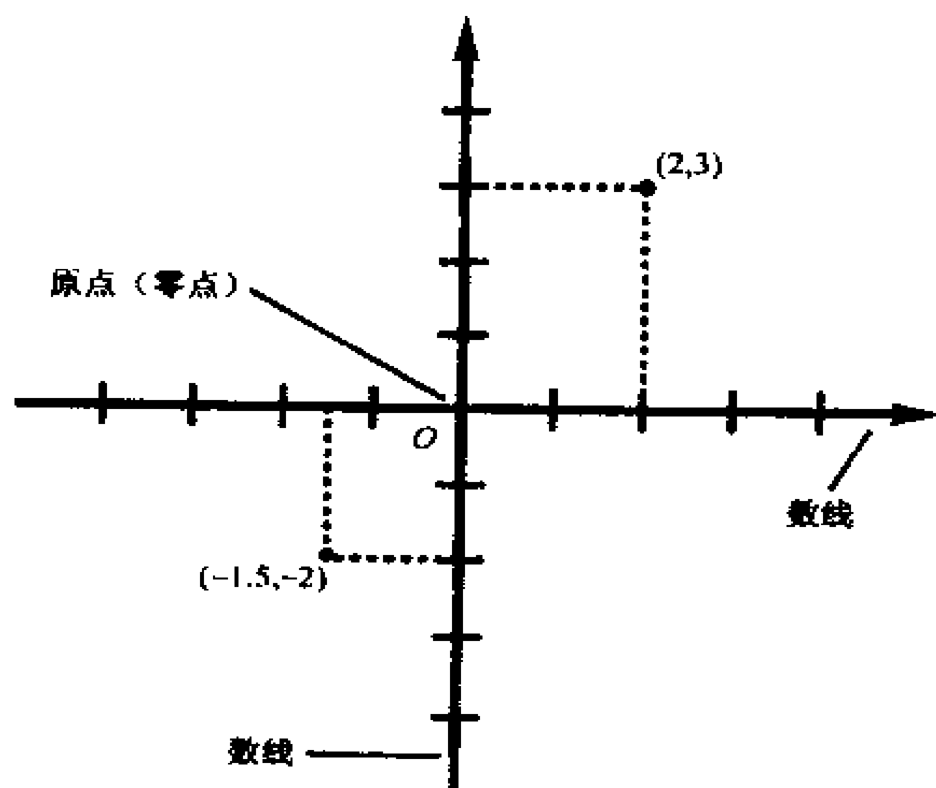


图 48 笛卡儿坐标系.平面上的每个点由两个实数(x,y)唯一确定,其中 x 是从该点到原点的水平距离,y 是从该点到原点的垂直距离.

原点之间的距离，以及沿着垂直方向与原点的距离．为简便起见，水平方向的轴称为 x 轴，垂直方向的轴称为 y 轴．

例如，图 48 画出了在 x 轴上对应的数为 2，在 y 轴上对应 210】的数为 3 的点．这个点等同于两个数(2,3)．同样，任一个点都等同于一个包含两个数的集合．图 48 中第二个点位于(－1.5，－2)，这就是说它位于原点左方 1.5 个单位，位于原点下方 2 个单位．任一个点所对应的两个数称为该点的坐标．为了纪念笛卡儿，我们称这个系统为笛卡儿坐标系．

除了发明这么精妙的系统把点的位置用数的集合来表示以外，笛卡儿还做了许多事．他实现了用代数关系来描述几何曲线的有效方法，这是解析几何的关键所在．圆心在原点的圆的代数方程为 $x^2+y^2=r^2$，其中 x 和 y 表示半径为 r 的圆上的点的坐标．虽然在古代已经对圆做过很多研究，但解析几何让我们大大前进了一步．它使我们能有效地去研究那些在欧几里得几何中 211】很难对付的曲线．椭圆是一种拉长了的圆，用于描述行星的运行轨道，它的方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 a 是长轴，b 是短轴．抛物线是与一个确定的点和一条确定的直线有固定距离的点组成的集合，它的方程为 $y^2=4mx$，其中 m 为原点到确定点的距离．

像抛物线和椭圆这样的曲线，能帮我们描述发生在我们周围的许多自然现象．通过把复杂的几何曲线表示成代数关系，才有可能去研究现代几何学．我们将看到，笛卡儿用以表示点的新系统能使负数方根变得容易理解．但是在那个时代，笛卡儿还不可能走到这一步．用笛卡儿坐标系去理解负数方根的工作，一直到差不多两个世纪之后才在高斯的著作中问世．

笛卡儿在 1619 年得到的解析几何这把魔钥，在拖延了 18 年后于 1637 年出版．这期间他参加过几次战役，并有好几次是侥幸脱险，保全了性命．正如贝尔(E．T．Bell)在他的《数学家》一书中所指出的，很可能在 1637 年之前的某年，一颗流弹射中笛

卡儿并结束了他的生命，那么世界只好耐心地等待那最伟大的发现了．笛卡儿生命的最后几年都贡献给了哲学、数学和科学，1650 年他因病逝世，享年 53 岁．

高斯将复数定位

卡尔·弗莱德里希·高斯于 1777 年 4 月 30 日生于一个社会地位低下的农民家庭．他是一个神童．他的母亲多罗西娅·本茨·高斯（Dorothea Benze Gauss）却极力推动她的儿子受教育，以使他摆脱做农民的命运．在布伦瑞克（Brunswick）公爵的帮助下，高斯实现了这一愿望．公爵给以资助让他在 15 岁时进入卡罗琳学院，到 18 岁时进入格丁根大学．1799 年，年仅 22 岁的高斯从黑尔姆施泰特（Helmstadt）大学得到了博士学位．因为无法得到他喜欢的数学职位，他成为格丁根大学天文台台长，并兼任天文学教授．不过，数学仍是他最喜爱的学问．靠着他在数学上的发现，高斯很快就在欧洲赢得了名声，被认为是世界上最伟大的数学家．然而他的生活却常常像一幕幕悲剧，包括先后两任妻子病逝（第一个妻子产后死去），还有一个孩子夭折．这使他产生了对死亡的恐惧．在晚年时，他对医生也极不信任．

高斯出版了几部杰作，对数论、复分析、微分几何、拓扑以及数学在天文学中的应用等领域，对磁学、结晶学、光学、电学等各门科学都做出了贡献．他的私人笔记一直到他逝世（1855 年）后过了半个世纪才出版，人们从中发现他对非欧几何也作出了预言．不过我们在这里所关心的是他的博士论文的一个推论．上面已说过，他 1799 年的论文首次证明了每个多项式方程至少有一个解．在证明过程中，高斯一定想出了解决负数开根这一问题的可靠基础，因为多项式方程 $x^2+1=0$ 只有负数方根这种形式的解，如果我们没有办法对付它们，代数基本定理就不能成立．

高斯使用笛卡儿的有两条相交直线组成的坐标系．他将水平方向的 x 轴指定为实数直线，这是我们熟知的．垂直的轴变

为另一种数线，即以$\sqrt{-1}$为基础的虚数的数线．为了方便，我们用字母 i 表示$\sqrt{-1}$．x 轴上的每个点都是实数，y 轴上的每个点都是某个实数乘以 i（或$\sqrt{-1}$）．由此可知，$\sqrt{-1}$是 y 轴上距原点一个单位的点（图 49），$2\sqrt{-1}$是在 y 轴上距原点两个单位的点，而 $-\sqrt{-1}$就是 y 轴上从原点向下一个单位的点．平面中所有既不在 x 轴上也不在 y 轴上的点是什么呢？它们是所谓的复数，即实数和虚数的一种组合．每个点用两个数 a 和 b 表示，这两个数定义了一个复数 $a+bi$，其中 a 是它的实数部分（简称实部），b 是虚数部分（简称虚部）．

高斯用这种方法定义了一大类数——复数，实数只是复数的一个子集．实数就是虚部为 0 的复数．反过来，y 轴表示纯虚数，即实部为 0 的复数．用$\sqrt{-1}$去乘实数 1，等于把 1 这个数逆

213】

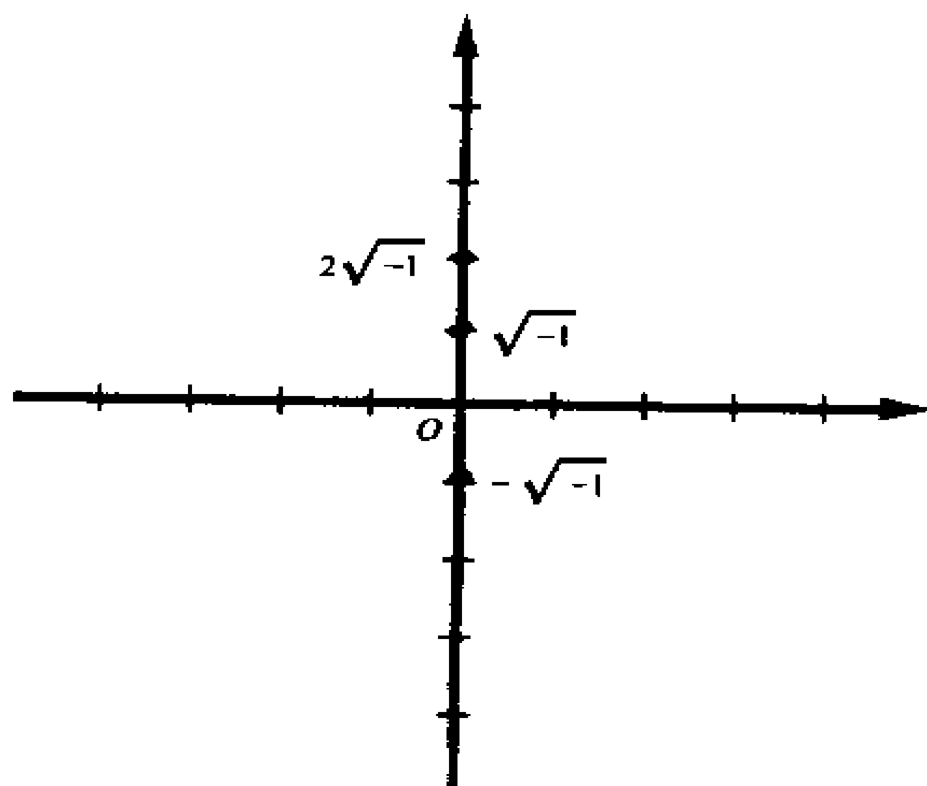


图 49 高斯平面．水平轴上的值代表实数，而垂直轴上的数代表$\sqrt{-1}$的倍数．高斯平面上每个点可用两个实数表示．表示的形式有两种：(a,b)或 $a+bi$（$i=\sqrt{-1}$）．这种平面通常称之为复平面．

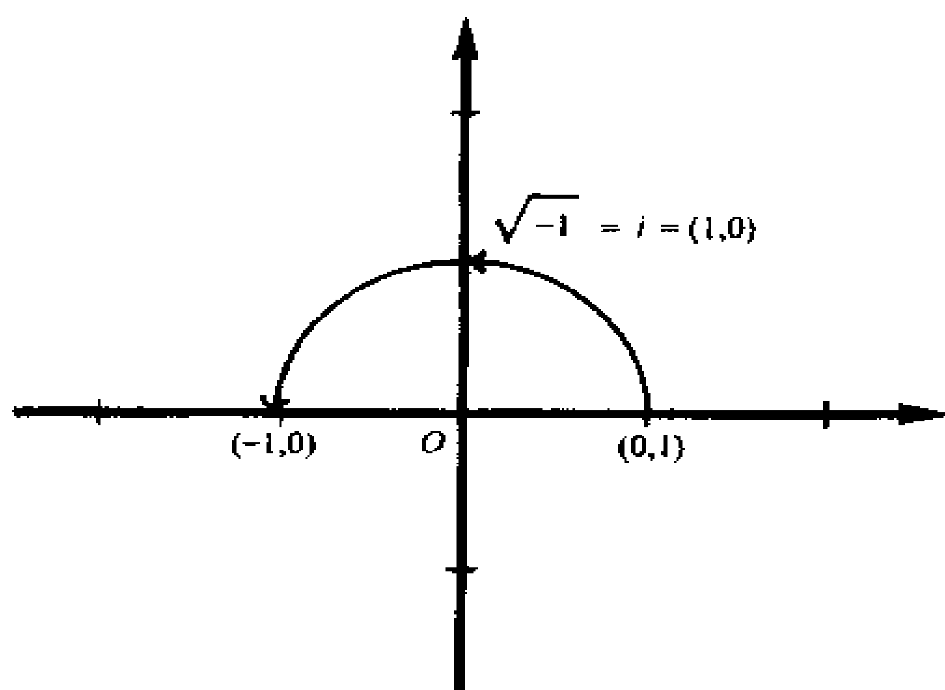


图 50 高斯平面.用$\sqrt{-1}$去乘 1 等于将 1 逆时针旋转 90°到垂直轴上,得到$\sqrt{-1}$.将$\sqrt{-1}$再乘$\sqrt{-1}$等于继续逆时针旋转 90°到水平轴上,得到值 -1,因此$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$.

时针旋转到 y 轴上$\sqrt{-1}$所对应的位置.如果我们接着用$\sqrt{-1}$去乘,等于把它再逆时针旋转到 x 轴的负半轴上的相应位置上(图 50).

这第二个旋转相当于$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$.因此乘$\sqrt{-1}$两次得到 -1.简记为$(\sqrt{-1})\cdot(\sqrt{-1})=i\cdot i=i^2=-1$.

现在必须要保证通常的算术运算能在复数中进行.我们这样来做两个复数的加法:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i.$$ 【214】

因此两复数相加时只要相应的两个实部(a 和 c)与相应的两个虚部(b 和 d)分别相加.减法也很容易:

$$(a+bi)-(c+di)=a+bi-c-di=(a-c)+(b-d)i.$$

此时只要将相应的实部相减,相应的虚部相减.乘法比较有趣,我们这样来做:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2.$$

但是 $i^2=-1$,所以我们用 -1 代替最后一项中的 i^2 得

【215】 $$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci-bd=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

复数的除法比较难:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

注意,当我们做四种运算时,我们总是得到另一些复数;因此,复数在这四种算术运算下是封闭的,当然要排除以 0 做除数这一特殊情形.此外,复数还可以作升高幂次或开根计算,所得结果也仍然是复数.因此对于这两种附加的运算,复数也是封闭的.

至此,我们在解多项式方程时可以放开胆来干了.如考虑多项式方程 $x^2-6x+11=0$,我们得到两个解,$3+\sqrt{2}i$ 和 $3-\sqrt{2}i$.为了标出这两个点在复平面(高斯平面)上的位置,我们在轴上

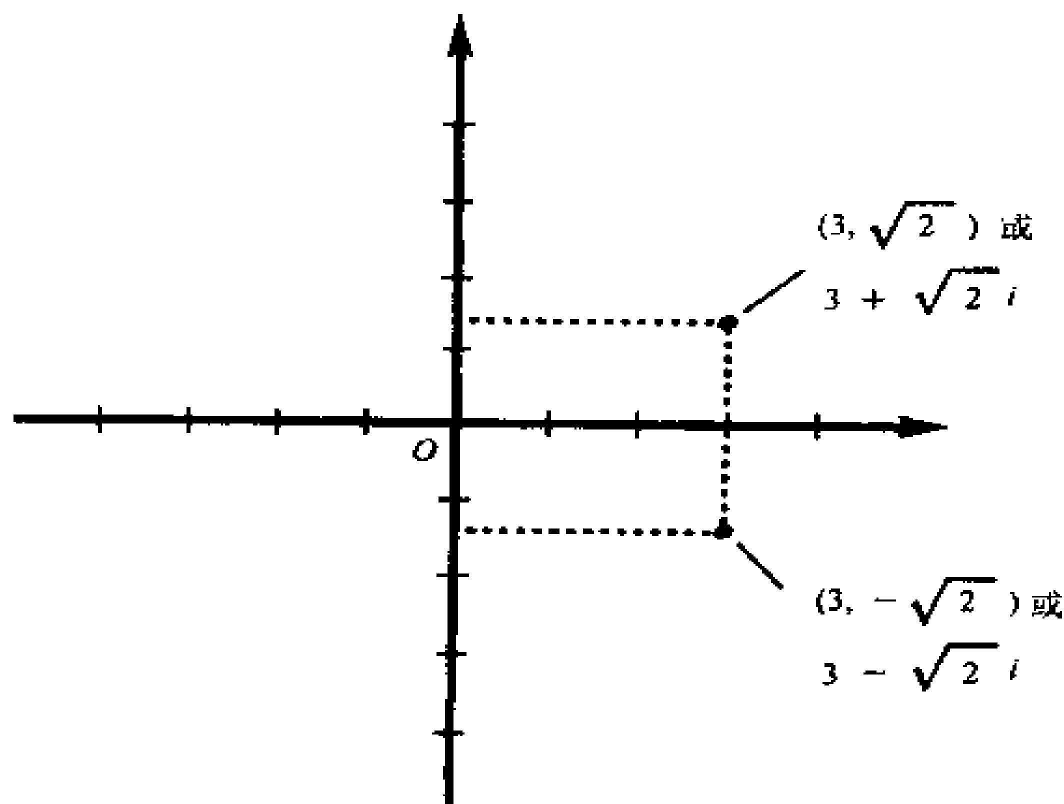


图 51 在高斯平面上标出多项式方程 $x^2-6x+11=0$ 的两个解.

从原点向右移动三个单位(图 51). 然后,向原点上方移动$\sqrt{2}$的距离(约为 1.414 个单位),就可标出第一个点 $3+\sqrt{2}i$. 对第二个点,我们在 x 轴上移动三个单位后,向下移动$\sqrt{2}$的距离,这就标出了第二个点 $3-\sqrt{2}i$. 事实上,我们发现带有虚数部分的复数以 $a+bi$ 和 $a-bi$ 的形式成对出现. 这样的复数对叫做共轭复数. [216]

最后,卡尔·高斯做了其他数学家都避免去做的事. 他宣布虚数(事实上是所有的复数)是存在的,它是和实数一样实在的对象. 如果负数和无理数都存在,那么复数也存在. 当高斯正在把复数定义为平面上的点时,另外两个数学家也不约而同地做着同样的事,这是相当令人惊讶的. 一个是自学成材的挪威数学家卡斯珀·韦塞尔(Caspar Wessel, 1745—1822),另一个是瑞士的记帐员让·罗贝尔·阿尔甘(Jean Robert Argand, 1768—1862). 这两人都建议用几何方法表示复数,但是他们的工作都没有引起人们的注意.

复数知多少?

在拓宽数的概念的道路上,显然我们已迈出了一大步. 看看实数直线仅仅是嵌在高斯平面中的一条线,我们会强烈地感到平面上的点比单条直线上的点要多得多. 大多数数学家也有同样的感觉. 事实上,通过 y 轴上的每一点都可画一条直线平行于 x 轴. 这种直线所含的点如同实数直线上的一样多. 又因为 y 轴上有不可数的那么多点,我们可画出的直线数就是不可数的,而且每条这样的直线上又有不可数的那么多点. 真的,这种不可数的不可数集合本身确实要比单单一条直线上的点的集合大得多.

为了回答小标题中提出的问题,我们必须再次谈到康托尔. 康托尔曾提到过我们想解决的这个问题,1874 年 1 月 5 日他在写给他的朋友戴德金的信中说:

将一个面(假定是包含边界的正方形)唯一地映射到一条线(假定是包含端点的直线)上,使得面上每个点由直线上的一个点映射而来,反过来直线上的任一点由面上的一个点映射过来.这可能做到吗?

这次,康托尔解决这个问题所用的时间大大超过了八天.1877年,即三年以后,他寄给戴德金一份解答的概要.康托尔所做的就是展示了一种办法,它可以将一个平面上的点一对一地映射到一条直线上的点上.平面上任一个点可以用两个数(a,b)表示,而a,b是复数$a+bi$的实部和虚部.这两个数都有唯一的十进小数展开式,为了方便,我们可以假定a和b都是位于0和1之间的数:

$$a=0.a_1a_2a_3a_4\cdots,$$
$$b=0.b_1b_2b_3b_4\cdots.$$

我们可以利用这两个小数展开式造出唯一的一个实数直线上的实数.办法是交替地选取a和b中各数位上的数字来构作这个数p:

$$p=0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3a_4b_4\cdots.$$

所构作的数p是一个实数,它可以唯一地映射到复数$a+bi$之上.这种构造的妙处在于实现了复平面上所有复数与实数直线之间的一对一的映射.这证明了实数直线的基数$\aleph_1$也是复平面上所有复数的基数.可见,数线上的数是多么的丰富和稠密,数线上点的数目居然跟平面上点的数目一样多,真把我们的直观感觉给推翻了,康托尔大概也有过跟我们一样的感触.他想出了证明,但是要接受它却经历了一段艰难的时日.[8]

然而,复平面和实数直线之间确实存在着本质的差别.实数直线上所有的数按照"大于"关系是有序的.如果a,b是实数,若a不等于b,则不是$a>b$就是$b>a$.换句话说,这两个数根

据大小排了序.复平面的情形就不是这样.我们不能照通常方式说:给定了两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$,其中一个比另一个大.因 [218] 此复数构成的这个数域不可能是有序的.数域是指任一由实数或复数组成的集合,使得两数的和、差、积、商(0不是除数)仍是该集合中的一个数.因此数域在四种算术运算下是封闭的.实数构成一个*有序的数域*.和实数的情形一样,复数也可以是有理的(当 $a+bi$ 中的 a 和 b 都是有理数时)或无理的;也可以是代数的或超越的(当 a 或 b 是超越的).想像一下那个复平面,在 x 轴和 y 轴上大多数的数都是超越数,我们不能不为平面上到处都有复超越数的身影而惊叹!

复数的出现不仅为代数中的麻烦事理出了头绪,它还开辟了数学中一个全新的分支,即所谓的复分析.它使数学家能更有效地探讨理论数学的奥秘,并建立涉及范围更广的应用数学模型.复数不仅满足了解多项式方程的要求,它还能够用来解释某些其他的数学表达式——如果我们只局限于实数范围是无法解释清楚这些表达式的.例如方程 $e^x=-1$ 没有实数解,如果容许有复数解,那么它的解就是 πi 或 $\pi\sqrt{-1}$.这个复数点的位置在 y 轴上原点的上方,距原点的距离为 π.事实上,欧拉在1748年首先推导出了等式 $e^{\pi i}+1=0$,那是高斯为复数奠定坚实的基础之前的事.全世界的数学家都认为这个等式是全部数学中最深奥也是最美的关系式之一.它把加号、等号,最基本的数0和1,两个超越数 e 和 π,以及复数 i(或 $\sqrt{-1}$)结合到一个等式之中,所有这些东西都聚在如此简单又令人心驰神迷的表达式中.

哈密顿四元数

一旦高斯将数的范围从实数直线扩展到了复平面,那么能否将这一过程进一步扩展至三维空间的问题迟早都会有人来考 [219] 虑的.这个问题应该这样来提:是否存在一个对应于三维空间中的点的三元数组 (a,b,c) 的集合,它们可以像数一样运算? 果

然有个人出来担当此任，他就是威廉·罗恩·哈密顿(William Rowan Hamilton)——可能是爱尔兰最伟大的数学家.他1805年生于都柏林，是一个早熟的孩子.10岁前他从他精通多国语言的叔叔那里学习了好几种外语.后来他曾说过，他到13岁时已懂得13种外语.值得庆幸的是，这个年轻的爱尔兰人满足了自己对外语的好奇心后，便将注意力转向了数学.

哈密顿17岁时进入了都柏林的三一学院.五年后，当他还是个学生时，就被指定为爱尔兰皇家学会的天文学家和三一学院的天文学教授.

1828年，哈密顿开始考虑将复数的思想推广到三维空间.他需要一种方法来定义三元数组的加法和乘法，以保证基本的代数运算规律不被破坏.这些规律是：

1. $a+b=b+a$　（加法交换律）
2. $a\cdot b=b\cdot a$　（乘法交换律）
3. $(a+b)+c=a+(b+c)$　（加法结合律）
4. $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$　（乘法结合律）
5. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$　（分配律）

他希望这些规律对任意三元数组也成立.

然而，哈密顿没能对三元数组找到能满足上面五条规律的运算的定义.复平面上两个复数的乘法可以用一种旋转来定义.但当哈密顿也试图在三维空间中用旋转来定义乘法时，他失败了.事实证明，利用三元数组无法在三维空间中定义旋转.四维空间的情形又如何呢？在四维空间中定义的数能不能保持上述代数规律呢？哈密顿的研究转向形如 $a+bi+cj+dk$ 的"超复"数.

哈密顿为此奋斗了十五年，最后，在一次跟他的妻子散步时，他突然得到了解决问题的灵感，日期是1843年10月16日.它是我们知道的又一项伟大数学发现的确切日期.哈密顿知道，他必须放弃一个代数规律，即乘法交换律.一旦他不再坚持要求

$a \cdot b = b \cdot a$，他就能在他的新数中定义四种代数运算，这种新数他称为*四元数*. 这种数被定义为形如 $a + bi + cj + dk$ 的实数四元数组，且有下列等式成立：

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ 和 } ijk = -1.$$

哈密顿成功地使他定义的运算能保证除了乘法交换律之外的所有运算规律都成立. 今天我们知道只有在二维情形定义的代数运算才能保证乘法交换律成立. 在任何高维空间定义的代数运算必须放弃这条定律.

哈密顿认为四元数是他作出的最伟大的贡献，并花费了一生中的大部分时光去详细解释它. 虽然现代数学不再使用他那种四元数，但以四元数为基础确实引发了几项意义重大的成就. 一个四元数分为两部分：纯实数部分 a，它称为*纯量*；"虚数部分" $bi + cj + dk$，它称为*向量*. 向量是三维空间中的有方向的线段，在很多科学领域都有应用. 数学中研究向量的学科是我们熟知的向量分析.

哈密顿的四元数使代数学家认识到，通过适当地改变代数中的基本运算规则可以发展出新的代数，这恰与通过改变欧几里得的第五公设而发展出非欧几何类似. 因此，四元数理论标志着现代抽象代数的开始.

在告别哈密顿四元数的话题之前，我们照例要提出我们最喜爱的一个问题：四元数究竟有多少？ 又是康托尔为我们提供了答案. 我们将重复以前的办法，把超空间中的四元数映射到实数直线上. 我们把组成某个四元数的四个实数写成十进小数的形式. 为了方便，我们同样可以假定这些数都在 0 和 1 之间. 于是我们有

$$a = 0.a_1a_2a_3a_4\cdots,$$
$$b = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots,$$
$$c = 0.c_1c_2c_3c_4\cdots,$$
$$d = 0.d_1d_2d_3d_4\cdots.$$

【221】

这四个数定义了一个四元数，我们可用它们构作一个与之对应的实数 p：

$$p = 0.a_1b_1c_1d_1a_2b_2c_2d_2a_3b_3c_3d_3a_4b_4c_4d_4\cdots.$$

这样我们便得到了一个从四维空间中所有的(无数的)四元数到实数的一一对应的映射. 像复数一样，四元数的基数与实数的基数相同，这说明单条直线上的点数与平面上，三维空间甚至四维空间中的点数一样多. 事实上，点的“数目”不是由维数决定的. 康托尔证明，对于可数无穷维数的情形，其点集的基数仍等于直线的基数，即 $\aleph_1$. 这在直观上很难让人接受，以致于很多数学家都坚信康托尔必定是搞错了.

至此，我们不仅考虑了日常生活中碰到的那些数，而且还考虑了复数，那是在日常科学活动中常遇到的数. 下一步我们将考虑一种更稀奇古怪的数，一种在普遍人群中百分之九十九的人

222】都没听说过的数. 也许你有兴趣去冒险涉足它.

第12章 难以想象的大：超限数

给超限数下定义

在研究超越数时，我们回顾了康托尔是如何为两种类型的无限集合——可数集与不可数集，定义了它们的无限基数$\aleph_0$和$\aleph_1$. 如N是全体自然数的无限集合，我们定义$\overline{N}$作为N的基数. 这样可以避免将集合与它的基数相混淆. 用同样的办法，我们以记号R代表所有实数组成的集合，而$\overline{R}$就代表R的基数，它也常常简记为c. 我们知道$\overline{N}=\aleph_0$. 康托尔相信$c=\aleph_1$，但他未能证明这点. 我们还知道人们早已提出过在$\aleph_0$和c之间是否还存在其他无限基数的问题，其答案说：这个问题是不可判定的.

然而康托尔走得更远，大大超出了上述两个无限基数的范围. 实际上，他定义了由基数形成的无穷序列，$\aleph_0$和$\aleph_1$只是其中最靠前面的两个. 这种基数就是我们要说的超限数——超过或大于有限数的数. 相继地生成各个超限数的方法很简单. 如果有一个含有n个元素的有限集合，我们可以考虑这n个元素有多少种分组方式. 所有可能得到的分组(即元素组合)都可看成是一个新集合中的元素，这个新集合的基数高于原来集合的基数. 但是，当我们考虑所有类型的集合，特别是无限集合时，我们怎样知道一定可以得到它的所有可能的元素组合呢？这时，我【223】们需要应用集合论的一条公理：

幂公理　对每个给定的集合都存在一种集合的汇集，该汇集以给定集合的所有子集合作为它的元素.

这个公理保证了我们永远可作出由元素组合得到的集合，对于有限集合这个公理是显然的，但当我们考虑无限集合时，它就不是那么显然了.

例如，考虑由三个元素 1,2,3 组成的集合，我们用{1,2,3}来表示.总共存在多少种方式让这三个元素登台亮相呢？答案是八种，可以写成八个不同的集合：{Ø}，{1}，{2}，{3}，{1,2}，{1,3}，{2,3}，{1,2,3}，其中第一个集合{Ø}称为空集，常常简单记作 Ø，不必加括号.于是，由这八个元素{Ø，{1}，{2}，{3}，{1,2}，{1,3}，{2,3}，{1,2,3}}组成的集合的基数是 8.由三个元素的集合可作成八个不同的集合这一事实，用一个公式来表示就是 $2^3=8$.我们可以推广这个公式：由 n 个元素的集合可作成 2^n 个不同的集合.我们从 n 个元素出发作成的集合的个数总是大于 n 的.即有限基数 2^n 总大于 n.康托尔在 1873 年写给戴德金的著名的信中，对于无限集合也证明了这种关系，即如果 n 是一个无限集合的基数，则 $n<2^n$.这就是现称的康托尔定理.

康托尔定理　对所有的基数 n，都有 $n<2^n$.

如果从 $\aleph_0$ 开始不断地取 2 的幂次，我们可以生成一个无限基数的序列.具体方法如下：$\aleph_1=2^{\aleph_0}$，类似地，$\aleph_2=2^{\aleph_1}$，$\aleph_3=2^{\aleph_2}$.每次我们只要将 2 的幂次升高到刚得到的那个超限数，就可生成下一个超限数.这样，我们就生成了一个由超限数组成的无限集：$\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\aleph_3,\aleph_4,\aleph_5,\aleph_6,\aleph_7,\cdots$.

利用康托尔定理，我们可以形象地看到如何由 $\aleph_0$ 生成 c.我们将证明 $2^{\aleph_0}=10^{\aleph_0}$.因为 $\aleph_0$ 代表可数集合{1,2,3,…}，所以 $10^{\aleph_0}$ 就代表当每个(子)集合中的每个数字都可以从 10 个数字中任选时，所得到的所有可能的组合.[1]每一个组合唯一地给出一个集合{$a,b,c,\cdots$}，它可以表示位于 0 与 1 之间的实数的小数展开.因此，由 $10^{\aleph_0}$ 所代表的组合将包括 0 与 1 之间的所有

24】

的实数的小数展开,而由这些小数组成的集合的基数为 c. 但 c 除了是 0 与 1 之间的点集的基数外,也是整条实数直线的基数. 因此我们有 $2^{\aleph_0}=10^{\aleph_0}=c$. 另一个奇怪的结果是 $\aleph_0! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots = c$.

超限数作为数,也必须像有限数那样服从一组运算规律. 例如,在超限数中可定义加法和乘法,但是它们看起来比较别扭,如,设 $v<w$,则 $\aleph_v+\aleph_w=\aleph_w$, $\aleph_v\cdot\aleph_w=\aleph_w$. 因此,两个超限数的和与积的基数总是等于两者中基数的最大值. 这意味着 $\aleph_v{}^2=\aleph_v$;事实上对任意有限的 n,我们都有 $\aleph_v^n=\aleph_v$. 这也意味着对任何有限的 n,我们有 $\aleph_v+\aleph_v=2\aleph_v=n\cdot\aleph_v=\aleph_v$. 因此超限数在加和乘的时候,其实并不增大. 只有用它做指数时我们才会得到有趣的结论,那便是作出新的超限数.

除了超限数的基数理论之外,康托尔还平行地发展了一套序数理论. 想一想序数和基数的定义,我们知道基数是与集合的大小相联系的,而序数只是跟这样的一种数的序列相联系,它每次往前走一步直至最后一个序数. 自然数列{1,2,3,4,5,…}就是这样一个序列,其中每个序数加 1 产生下一个序数,这个序列的上极限被称为 ω,我们有 $\omega=\aleph_0$. 这表明第一个超限序数 ω 等于第一个超限基数. 然后康托尔定义跟他的基数相对应的较大的序数.

当从一个超限数进到下一个超限数时,我们很难掌握到底增大了多少. 当从 $\aleph_0$ 增到 $\aleph_1$ 时,我们是从自然数的可数集进到了实数的不可数集,实数密集或稠密得足以填满整个宇宙空间. 由于 $\aleph_1$ 是不可数的,那么所有更大的超限数当然也是不可数的,所以 $\aleph_1$ 是第一个不可数的基数. 当我们从 $\aleph_1$ 到了 $\aleph_2$,我 [225] 们遇到的是"多么大"的数呢? 有没有 $\aleph_2$ 的例子呢? 数学家说,$\aleph_2$ 等于定义于实数直线上 0 与 1 之间的区间上的所有实函数的基数. 这也许是数学上的真理,但并不能告诉我们 $\aleph_2$ 代表的东西到底有多么大. 那么 $\aleph_3$ 和 $\aleph_{10}$ 又是什么? 更有甚者,

$\aleph_{1\,000\,000}$是什么玩意儿？这都是些大得不得了的数，我们根本没办法抓住它们的大小．可它们在无穷的大道上还仅仅是个开始！

某些无法想像的大数

我们可以继续定义新的更大的超限数．我们能让$\aleph$的下标跑遍所有自然数，而终结于ω，最后得到$\aleph_\omega$，它实际上跟$\aleph_{\aleph_0}$是一样的．我们可以用同样的方式继续做下去，写上更大的下标，以及下标的下标，但这未免有些乏味．所以我们将长串的符号浓缩在一起，不再去添加任何表示大小在扩展的符号．为此，我们必须先来看看绝对无限(Absolute Infinite)．

在康托尔之前，哲学家和数学家们一般只定义两种范畴：有限与无限．可以一个个去数清楚的事物属于有限的范畴，人们的智力能够抓住它们．另一方面，无限的范围太广了，超出了人们的理解力，因此常常被认为是跟上帝等同的事物．这就变成了绝对无限．正如鲁迪·拉克(Rudy Rucker)在《无限与智力》一书中所指出的，

> 从理性思维的角度看，上帝是无法想像的．没有一条直通的路可以从人世间到达它．关于“上帝”的任何真知必定是神秘的，如果真有可能存在神秘知识的话．不过，即使关于“上帝”的完整认知是神秘的，也仍有可能并且值得对有关上帝的不完整的知识进行符合理性的讨论．[2)]

康托尔相信绝对无限是存在的，并把它跟上帝相等同．[3)]他的论点是：在绝对无限之下存在着合理的无限，是我们可以去谈论的对象．事实上，他相信他的超限数理论是从上帝那儿来的．绝对无限也可以等同于所有的无限构成的汇集．我们不能称这样的汇集为集合，因为集合具有特定的，因而是有限的定义．一

个集合的元素不管怎样多,都可以被概念化为一种统一的整体.而上帝是不能被理解为统一体的.我们把"绝对"记做Ω.Ω可能是序数吗?否,因为如是它是序数,按照常识,我们可以加上1来生成更大的序数,可是我们已经知道没有任何东西比它更大.同理,我们也不能简单地说Ω是基数,因为如果它是个基数,我们可以用它作成下一个基数2^{Ω},这样就有了一个比Ω更大的东西,这又导致了矛盾.因此Ω不是序数,也不是基数;它超越了所有序数和所有基数;作为一个整体,它是不可知的.然而这并不排除Ω确实具有超限数的某些性质.

我们已经定义了Ω(在实际中,我们不可能真的去定义它)是超越了所有的超限无穷的东西.现在我们可以进一步来定义一些更有趣的超限数.Ω的两个性质很有用,第一,对于Ω所具有的任何一个性质,必存在某个超限数也具有该性质.为什么?如果Ω具有独特的性质p,而其他无限集都不具有这个性质,那么我们可以将Ω唯一地描述为具有性质p的无限.这样一来,Ω就不是"绝对"和不可定义的了.因此对Ω所具有的每个性质,至少存在一个超限数也具有它.注意,用同样的推理,我们可以得到一个更强的论断.若Ω是具有性质p的两个无限之一,则我们仍可以唯一地定义Ω,诸如定义Ω为具有性质p的最大的无限.因为不允许我们有这样的定义,所以我们知道必有无限多个超限数具有性质p.Ω的这种性质,即它的所有性质必与其他超限数所共享,被称为*反射原理*.[4]这就是说,Ω把它自己的性质向下反射到超限数上.

Ω的第二个有趣的性质是,我们永远不能通过不断地构作越来越大的超限数而达到Ω.严格地说,Ω不能被小于它的数构造出来.否则,我们可以把Ω定义为某些超限数的一个连续构造物.因此,我们说Ω是不能从下面达到的,或说它是不可达的.根据反射原理,我们知道必有无限多个超限数也具有不可达 **【227】** 的性质.这就产生了新一类的巨大的数:*不可达超限数*.无论我

们怎样努力，也无法用$\aleph$的更大的组合来构造出这些数．它们实在太大了——它们是不可达的．

从技术上说，$\aleph_0$是第一个不可达的超限数，因为通过加上越来越多的在其之下的有限数，我们还是不可能达到它．我们称它为第0个不可达数，因为在集合论中通常从0开始来数数(因此在$\aleph_0$中出现了0)．我们已谈到过的相继出现的$\aleph$们都是从以$\aleph_0$开始的比它低的$\aleph$构造出来的，因此它们不是不可达的．在$\aleph_0$之后出现的第一个不可达超限数称为θ(一个希腊字母)．θ称为超限数中第一个大基数．

比θ大的不可达数有多少呢？我们可以证明共有Ω个不可达的超限数．从θ_1开始，然后定义θ_2作为它的后继者，以这种方式写出整个不可达超限数的序列．不过我们还有更好的办法．我们只把不可达超限数定义成是不可达数，而且它的不可达程度(或称不可达次数)不能从下面的(由θ开始的)那些数得到．它的不可达程度如此之高以致于它在不可达数中的位置也是不可达到的．这种数被称为超不可达数．现在我们真正地接触到高度抽象化的大数了．显然，我们用同样的原理可以定义"超超不可达"数以致于"特超超不可达"数等等．但这样做下去又会变得十分乏味．

然而，超限数还是一直在引起人们的关注，数学家们也一直在忙于定义更大的超限基数．在超不可达基数之上的有马洛(Mahlo)基数，不可描述基数，不可言说的基数，分割基数，拉姆齐(Ramsey)基数，可测基数，强紧基数，超强紧基数，以及可扩张基数(extendable cardinal)．可扩张基数是最大的，有些数学家认为它们不一定存在，而另一些数学家则认为那是我们能找到的最大的基数．[5)]这里，每一个新的更大的基数不会是前一个基数的简单的后继者，它们表示在走向绝对无限的途中到达了一个新的更高的层次，这一点很重要．也许我们目前的状况与物理学中的类似：分裂原子，得到次原子粒子，然后总能发现进一步

的分裂,得到更基本的粒子……也许我们将会继续定义更大的基数,只要我们愿意!

下面的表 11 总结了各种超限数,尽管还不够完全.我们之所以假定它不完全,是因为一旦我们宣称它是完全的,就会有数学家来证明我们错了.

表 11　部分超限数的表

名称	符　号	注解
阿列夫－0	$\aleph_0$	$=\omega$,自然数、有理数及代数数的基数
阿列夫－1	$\aleph_1$	$=(?)c$,实数直线上点的基数
阿列夫列	$\aleph_0,\aleph_1,\aleph_2,\aleph_3,\cdots$	从 $\aleph_0$ 开始建立的阿列夫的序列
不可达数	θ	特大的数使得从下面无法达到它,它依赖于 Ω 的反射原理
超不可达数		更大的不可达数使得从 θ_1 无法达到它
大基数:马洛,不可描述的,不可言说的,分割,拉姆齐,可测的,强及超紧的,可扩张的		另外一些从下面无法达到的超限数的类
绝对无限	Ω	超越所有的数,一切集合的汇集,某些人心中的上帝

康托尔为超限数而战

康托尔关于实数是不可数的证明发表于 1874 年.当时,他的思想与理论未被普遍接受.的确,康托尔的工作燃起了一场关于无限性的辩论之火.前面我们已经提到过,反对康托尔思想的

主要对手是他在柏林大学时的一位教授克罗内克. 他说过这样一句精辟的话:"上帝创造了整数,其余才是人的工作."克罗内229】克属于现代的直觉主义学派,该学派拒绝接受无穷是一种完成了的事物,认为只存在潜在的无穷. 这恰恰跟22个世纪前的亚里士多德的观点雷同. 在这种意义下,克罗内克乃是毕达哥拉斯、柏拉图与亚里士多德营垒中的现代成员. 这种对无限的抗拒还蔓延到对无理数、超越数以及超限数身上. 奇怪的是,克罗内克与康托尔二人都是虔诚的教徒,并都信奉柏拉图的主张. 然而克罗内克感到超限数损伤了上帝的崇高与无限,因为只有上帝才具有无限的属性. 如果让别的东西也具有这种属性,无疑会损害上帝的崇高. 然而,康托尔却相信超限数会为上帝的崇高增辉,虽然超限数是难以想像的大,但上帝的无限性远远超过了它们.

克罗内克不是独自一人站在超限数的对立面;其他一些数学家也相信,容许这类无限进入数学的话,会对其本来稳固的逻辑基础带来极大的危害.

康托尔与克罗内克的争论给康托尔带来了灾难. 克罗内克不仅试图拖延甚至拒绝出版康托尔早期的一些论文,而且利用自己在柏林大学的地位与声望,对康托尔的理论进行猛烈的抨击. 这是一场双方力量失衡的战斗,克罗内克已经是一位因成就卓著而成名的德国一流数学家,另一边的康托尔只是一个年轻的,未被世人认识的,在一所很小的大学教书的数学家. 克罗内克的攻击日益激烈,其他数学家开始关注此事,并对康托尔表示了同情.[6]而克罗内克不只是攻击康托尔一个人,他对任何拥护无限数学的人都毫不留情地加以声讨.

在1884年5月,康托尔出现全面精神崩溃的症状,病情延续了近一个月. 他把这场病归因于在研究连续统假设(是否$\aleph_1 = c$?)时过度疲劳以及对克罗内克的攻击过于敏感. 在返回工作岗位时,他看起来已完全康复;但在以后的岁月中,这种精神不

稳定的疾病反复发作,越来越重.康托尔似乎患了某种很厉害的忧郁症.1899年,他最小的儿子死了.这一刺激与其他压力使他住进了哈雷神经诊所.他的忧郁症越来越重,1902—1903年的 [230] 冬季学期他被解除了教职并住院治疗.

从这时起一直到1918年他生命的终点,康托尔一直是在医院进进出出.他的传记作家曾报道说,是克罗内克的攻击使康托尔患上精神不稳定症.这种假设值得怀疑,我们大概永远不可能知道是什么心理因素(如果有的话)导致他得了这种病.从某些标准衡量,康托尔的婚姻是成功的,他与瓦利(Vally)结为夫妻,生养了六个子女.就在克罗内克长年抨击他的数学观点时,其他一些著名的数学家支持他,鼓励他的工作.克罗内克于1891年去世,此后康托尔的病情未见减轻.最后,康托尔终于得到了跟他的工作相称的褒奖,他成为伦敦数学会的荣誉会员,哥廷根(19世纪数学中心之一)科学学会会员,并获得了伦敦皇家学会的奖章.不幸的是,这一切都未能挽救他垂危的生命,他在一所精神病院去世,享年72岁.

尽管康托尔工作的主体已被20世纪的数学家所接受,可问题并未了结.首先,仍有一些直觉主义者拒绝接受完成了的无限这一概念.任何一种数学,只要它需要以无限过程求得某种结果,那么如同要从自然数达到 ω 一样,他们都认为是可疑的.此外,康托尔的某些工作被证明会导致令人困扰的逻辑悖论.我们知道,对于任意两个有限数 a 和 b,下列关系中必有一个成立:$a > b$,或 $b > a$,或 $a = b$.这对于超限数还总是对的吗? 康托尔证明:因为 $n < 2^n$,所以他引出的那些阿列夫(即 $\aleph_0, \aleph_1, \cdots$)也满足上述关系中的一种.不过,是否存在其他某种超限数,它们不是康托尔所定义的那些阿列夫呢? 的确,c 是否是康托尔的那些阿列夫中的一个呢?

任意两个超限基数是否必定享有大于、小于、等于这三种关系中的一种,这个问题的关键在于良序假设.

定义 一个集合是良序的，如果对包括集合本身在内的所有子集，都存在一个首元素．空集 ∅ 被认为是良序的．

31]

如果所有的基数组成的集合是良序的，那就有可能来证明它们可以互相比较．康托尔深信他的超限基数构成一个良序集，但未能给出证明．良序定理，即每个集合都可以被良序化，最后由恩斯特·策梅罗（1871—1956）在 1904 年给出了证明．所以对任意两个超限基数，可以证明那三种关系中必有一种成立．

良序定理并不能解决康托尔的超限数理论中的全部困难．自然数达到了第一个超限数 ω．超限数能否达到在 Ω 中的某个终点？要是假定它们能达到，就会导出矛盾．康托尔认识到超限数绝不像自然数那样能达到一个极限．他在下列定理中表达了这层意思．[8]

定理 所有的数组成的系统 Ω 是绝对无限的、非相容的汇集．

把 Ω 当成一个统一体来谈论，一定会导出种种奇谈怪论，事实上，根据它的定义，是不容许我们这样做的．这个概念还在给很多人带来麻烦，他们把它看成是集合论中的最基本的瑕疵．

尽管集合论和康托尔的无限数仍面临着各种问题，但超限数理论已为现代数学增添了一个活跃的、重要的领域．要是想跳出我们自己的小圈子去思考什么新奇的东西，现在可是已经有

32] 了那么多可供仔细推敲和玩味的数了！

第13章 天才的计算家

我们已经重温了人类在发现各种类型的数时所经历的千辛万苦，如今这些数充满了我们的数学世界．很多发现是由各种社会中的普通人经过长期的努力而慢慢获得的，但有些成果确实应归功于一些特殊的个人．我们对于数的理解是怎么跟人类的智力，特别是一些特殊的人的智力相联系的呢？如果没有那些具有超常能力的个体，我们的数学会达到何种水平呢？特别聪明的人真的能做出特别具有革命性的贡献吗？超常的人是不是能用一种特殊的方法去巧妙地处置数，洞悉其他常人无法触及的数的奥秘？我们首先来看看那样一些人，他们的计算能力大大超出了普通人的水平．

早在18世纪初，就有记录说不少人能做很难的快速心算；其中很多人是少年怪才，他们中的一些人长大后成为科学家或数学家，而另一些则一事无成．脑力强弱的千差万别告诉我们，心算能力只是一种特殊的能力，并不是刻画一般智力的标志．今天，我们不再对能快速心算大数的人肃然起敬．这可能是因为我们的世界已变得更复杂、更令人乏味，或者是由于快速发展的计算机使计算变得平凡无奇之故．当家里的计算机作15到20位数字的乘法易如反掌时，为什么我们还要靠心算作6位数的乘法呢？我希望人们能从沉闷繁琐的计算中解脱出来，以利于提出更抽象更有意义的问题．在过去的几个世纪中，心算常常是学校里的一门课程．为了训练记忆力，人们常常花费时间去记忆很 【233】

长的诗歌.也许人类智力中的机敏成分在不太成熟的年代中更有价值.

虽然我们现在不想强调心算,但我还是想回顾一下心算妙手的突出表现.我之所以这样做仅仅是为了使我们去更深地体会:作为人类,我们在数的概念中加进了多少自身的偏见.很幸运,有两本优秀的图书可供我们研究.要了解正常人群中突出的计算家,可参见布朗大学心理学教授史蒂文·B·史密斯(Steven B.Smith)所著的《大心算家》(The Great Mental Calculators).[1]要研究有精神损伤的人中的大心算家,可以参见威斯康辛州丰迪拉克心理健康中心主任,医学博士达罗尔得·A·特雷弗特(Darold A. Treffert)所著的《超常人》(Extraordinary People)一书.[2]

正常人中的心算家

无论是正常人还是天赋很高的人,他们所做的大数的计算都跟专门的技巧或特殊的环境有关.首先,大多数的计算家是少年怪才,有着(或曾经有过)很强的记忆力.这些人往往在一个与世隔绝的环境中成长.在孤独中,他们养成了对于数的特殊爱好.他们常常是不由自主地去数,去算.通常,当这些计算怪才被人发现后,他们或其他人就竭力将这种才能展示给公众看.因此大量的计算家成了舞台上的演员,在欧洲和美洲各地取悦于观众.

计算家表演的节目是很有限的.乘法是他们的看家节目:说出两个大数的乘积或一个数的幂次升高后的答案,等等.这些表34]演者通常会计算三或四位数的平方或立方,或者算一到两位数的更高的幂次.此外,大数的开方也很流行,然而令人奇怪的是,开方的难度比一般观众想像的要小.

此外,计算家的表演有时也会展示他们有辨认大的素数和分解大的合数的能力,尽管这类表演比做乘方、开方的要少一

些.有些计算家还上演强记一个很大的数或一大堆数的节目,或者表现他一眼就能看出某种物体的集合的基数的能力.

很少有人表演做加法或减法的能力.除法也只在表演分解因子时用到,而不是为了表演做除法本身.看来数之间的相乘关系最能吸引计算者,因此也比较容易被记住.

这种能力到底有多了不起呢?从表面上看,他们像是精神有点不正常的人.例如有报道说,杰迪代亚·巴克斯顿(Jedediah Buxton,1702 年生于英国埃尔姆顿(Elmton))是个完全病态的人,很可能有智障.然而他可以用心算做一个 39 位数的平方.他共用两个半月时间来完成这项工作;当我们知道他并不会读数也不会写数时,真让人感到这是一种令人吃惊的绝技.巴克斯顿为邻居们表演一些很难的心算以换取啤酒喝,他能记得自 12 岁起他在去过的每个小酒店中得到的啤酒的数量.

1824 年生于德国汉堡的约翰·马丁·察哈里亚斯·达斯(Johann Martin Zacharias Dase)在一次能力测试中,仅用 5 秒钟就算出两个 8 位数的乘积,正确地得到一个 16 位数.

虽然心算者在女性中较为少见,但还是有几位伟大的女计算家.1980 年,印度的沙库恩塔拉·黛维(Shakuntala Devi)演示了她的能力:乘两个 13 位数得到了一个 26 位数,时间仅用了 28 秒.这两个数是由计算机随机选取的.正如史蒂文·史密斯所报道的:"这个时间远远超过了以前任何报道过的记录,只能说它是令人难以置信的."[3)]

大数开方是计算家们最常表演的节目.这有两个理由,首先它很能吸引观众,其次它比人们想像的困难程度要低得多.例如,一个 8 位数开立方后仅得到一个两位数,这时只要来确定方【235】根的末位和首位数字.要是被开根数的位数再增加,根中的数字计算起来就难了.他们所用的被开方的数通常是个完全幂,这就保证所得结果是个整数.对于开奇数次方来说,方根最后一位数字可由被开方的数中最后一位数字唯一确定.最普通的一个例

子是所有以 5 结尾的数字必会有 5 这个因子. 因此末位为 5 的被开方数的根,其末位数必为 5.

维姆·克莱茵(Wim Klein)1912 年生于阿姆斯特丹. 在他的职业生涯中,曾在全欧洲表演心算,最后成为一名数值分析家,为欧洲核研究组织(CERN)工作. 1974 年,他将一个 200 位数开 23 次方,费时 18 分零 7 秒. 这还不是他最令人吃惊的成绩,因为后来他将一个 500 位的数开 23 次方只用了 2 分零 9 秒.[4)]

非凡的记忆力也是计算家表演的内容. 汉斯·埃伯施塔克(Hans Eberstark, 1929 年生于维也纳,在上海长大)记住了 π 的小数部分的前 11 000 位数字. 心理学实验结果证明,大多数人对于数的记忆力很有限. 接触一次就能记住的数的平均位数是:如果数字以单调声音读出,则是 7;如果以抑扬顿挫的声调读出,则可提高到 9. 如果数字不仅以抑扬顿挫的声调,而且以成对的方式读出,则可记住的位数为 12. 意大利计算家雅克·伊瑙迪(Jacquee Inaudi, 1867—1950)曾接受了 19 世纪一位著名的心理学家的测试,这位心理学家是阿尔弗雷德·宾耐特(Alfred Binet). 他测定伊瑙迪听过一次即能记住多达 42 位的数字. 这是普通人所能记住的数字长度的 3—6 倍. 这确实令人难以忘怀,不过也还是可信的. 萨洛·芬克尔斯坦(Salo Finkelstein, 1896 或 1897 年生于波兰的卢茨)在仅看一眼后可复述出有 20 到 28 位数字的数. 他仅用 4 秒钟便可记住一个 39 位的数.

显然,记忆力在大数计算中起了很大作用. 不少人披露说,维姆·克莱茵记住了高达 100 乘 100 的乘法表(而不是学生们能记住的 12 乘 12 以内的乘法表),1 000 以内所有整数的平方,以及 10 000 以内的全部 1 229 个素数. 某些计算天才还具备快速计数的能力. 约翰·达斯看一眼就可数出撒在桌子上的豌豆有多少粒. 他有时候利用这种才能去点一个他新去的图书馆的藏书总量.

[236]

素数与合数

我们将要考察的最后一种才能涉及合数的分解因子和素数的判定．在解决某些问题时，有些速算家把一个大数分解为它的素因子，例如，30 可分裂成或分解为 2·3·5．为什么数 2，3，5 被称为素数？

定义 素数是一种自然数，它只能被它自身和 1 整除．

另一方面，非素数除了能被 1 和自身整除外，还能被其他的数整除．例如 4，除了可被 1 和 4 整除外，还可被 2 整除．6 可被 1，6，2 和 3 整除．这样的数称为合数．

定义 合数是一种自然数，它除了 1 和自身外，还可被其他的数整除．

从上面的定义容易看出，所有大于 1 的自然数分为两类：素数和合数．我们不可能将素数再分解为更小的数，而任一个合数都可以表达为一组素数的乘积．由此可导出数学上最基本的结果之一，它说一个数的分解方式是唯一的，即每个数有其唯一的素因子集合．

算术基本定理 每个大于 1 的自然数有且仅有一种方式表达为素数的乘积．

[237]

有些计算怪才为了计算两个大数的乘积，先将要算的数分解为素数，然后再做乘法．但数学家们认识到素数有比使用它们做计算更深刻的问题要研究．自然数中有无限多个素数，但当自然数变得很大时，其中的素数变得很稀疏．快速判定大数中的哪个数是素数、哪个数是合数的问题，几个世纪以来一直吸引着数学家．人类辨认素数的平均能力有多高呢？初学者开始学习了什么是素数以后，能毫无困难地判别出 7 是素数，9 是合数．任何人经过简单的计算都能判定 51 是合数（= 3·17），而 53 是素数．职业数学家通常能判定 3 位数或 4 位数为素数还是合数．

分解大数以及判定大数是否是素数的问题之所以吸引人，

是因为没有现成的算法，或者说没有一系列确定的运算，能够很快地将大合数与大素数区分开来．但有的计算家似乎有一些诀窍．齐拉·科尔伯恩(Zerah Colburn, 1804—1840)生于佛蒙特，是美国的计算怪才．他能够告诉你一个六或七位的数是合数还是素数．如果是合数，他在几秒钟内就能列出它的因子．他的算法似乎是下意识的．但有一件事他是仔细考虑过的，那就是他确认他已记住了用于辨认因子的一大堆数的尾数．例如仅仅当因子后两位数为某些数字时才能得到相应合数的尾数．这与开方时用的技巧类似．

例如，科尔伯恩列出了合数 2 983 可能的因子尾数，共有 20 对．就是说 83 只能从 20 个不同的数字对来得到．检验这些数字对就可能发现 2 983 的因子．第一对是 01 和 83．因为 1 不会是因子(或说它是所有数的因子)，可能的因子是 101 和 83．但它们的乘积比 8 000 大．由于在 01 和 83 前面添上其他任何的数字都会变得更大，所以我们可以删去这对数．第二对是 03 和 61，我们知道 3 不是 2 983 的因子(将它们各位数字相加，立即可判[38]断其和不能被 3 整除)，所以下一种可能是 103×61，由于跟第一对相同的理由，我们也删去这对组合．最后，当试到第八对组合 19 和 57 时，我们才发现要找的因子，19 不可以改成 119，或者说这样做会产生太大的数，但注意到 $20\times150=3\ 000$．我们立刻发现 $19\times157=2\ 983$．自然，对我们来说，使用这种分解方法既慢又笨拙．但在计算怪才手里，特别是那些将这个过程融化在脑中的人，做这种计算很容易，几乎是瞬间即成的事．

科尔伯恩和其他表演者只记住二位数字表还是不够的，必须加上因子分解的帮助．乔治·帕克·比德尔(George Parker Bidder, 1806—1878)是来自英格兰莫顿地方的一名计算怪才．他偶然发现了一种数学家们已经知道的分解因子的算法．我们感兴趣的是去分解一个奇数，因为任何一个偶数都可以被 2 除尽，从而得到小一些的合数．一个奇的合数可以写为下列乘积的形式：

$(a+b)(a-b)$,乘出来的结果是 a^2-b^2.因此每个奇的合数可写为两个平方数 a^2 与 b^2 之差.比德尔利用这一事实去寻找因子.设 x 是我们要去分解的数,那么 $x=a^2-b^2$,或 $a^2-x=b^2$.于是我们只要去找 a,使得它的平方减去 x 是一个完全平方数.

让我们用这个方法来分解5 251,它有两个因子59和89.我们从大于5 251的最小完全平方数开始,那是 73^2.当然,如果能记住1到100之间的数的完全平方,那么一下子就能找到这个数.我们求73的平方得到5 329,减去5 251得到78,后者不是完全平方数.于是,我们从73增加1,得到74,并求它的平方得5 476,减去5 251得225,此时后者等于15的平方.因此 $5\ 251=(74+15)(74-15)=89\cdot59$.这就是我们要找的两个因子.

在实际中,我们无须去做 a 加1再平方.注意 $(a+1)^2=a^2+2a+1$,因此为了求 a 增加1后的平方,只要去求 $2a+1$,再把它加到 a^2 上.

利用数的尾数及平方差两项技巧,计算者可以对百万、有时甚至是千万的数进行快速因子分解.

[239]

约翰和麦克尔的案例

有一类特殊的计算怪才被称为白痴学者,他们有辨认极大的数是素数还是合数的能力.白痴学者在进行标准智商测试时,其智力水平比常人低很多,然而在音乐、或艺术、或计算方面却有惊人的能力.这类学者常常患有严重的孤独症,或是在童年时期左半大脑受过伤.对音乐或数有突出的认知能力的人,通常伴有过人的记忆力.有些白痴学者可以记住他们一生中每天的天气状况.这种计算能力通常还显示在对日历的计算上.如果你告诉这类学者某年某月某日,不论是过去的还是未来的日期,他(她)都会告诉你那天是星期几.白痴学者的另一种难以置信和稀有的才能是识别素数.约翰(John)与迈克尔(Mickael)就属于这种情况.

奥利弗·萨克斯(Oliver Sacks)博士是纽约阿尔贝特·爱因斯

坦(Albert Einstein)医学院的临床神经学教授,1966年他第一次在州立医院遇见白痴学者,一对孪生兄弟约翰与迈克尔.那时这对孪生兄弟26岁,他们从7岁起就被公共养育机构收容.两人都很孤僻,像精神病患者,而且反应迟缓.但是萨克斯博士在观察他们的日常生活时发现这对兄弟具有一种奇怪的才能.

一天,萨克斯博士观察这对双生子时,发现他们正在全神贯注地进行一场奇怪的对谈,每人轮流说一阵,沉默一会儿.两个男孩脸上都带着微笑,好像他们对自己私下开的玩笑感到非常高兴.萨克斯悄悄地走近他们,坐下来听.先是约翰说了一个六位数,迈克尔听到这个数后便聚精会神地思索.过了一会儿,他用自己的六位数回答了约翰.这下轮到约翰想一想再回答了.从孩子们脸上洋溢着的快乐表情,萨克斯博士知道他们非常喜欢他们的小游戏.

这是些什么数?萨克斯博士写下了其中的一些数,然后带回家去研究.翻阅了各种数学书籍之后,他发现这些数全是素数!六位数是些介于十万和百万之间的数.这两个年轻人都是反应迟钝的人,他们怎么知道、或是怎么识别这么大的素数的呢?故事并未就此完结.第二天,萨克斯博士带着他自己的关于素数的书又回到了医院.

40]

这次他与这对双生子坐在一起,说他能参加他们的游戏.起初他们面对着博士感到拘束,但很快就重新开始了对话.萨克斯博士先查了一下书,说出一个八位数的素数.两个孩子惊奇地凝视着这个新来的人.在听到这个数后半分多钟,这对双生子忽然笑了,并都点点头.约翰聚精会神想了很长时间,最后给出了一个九位数.迈克尔想了一阵后给出了第二个九位数.萨克斯博士又查阅他的素数书,并给出了一个十位数的素数.

九位和十位数的素数!九位数是在一亿到十亿之间的数;十位数是在十亿到百亿之间的数.游戏在继续,但很快孩子们就超出了萨克斯博士的能力所限.

> ……然后，约翰经过长时间的苦思之后，说出了一个二十位数．我无法检验这个数，无法应对，因为我自己的书没有记下超过十位数的素数．但迈克尔还在应对……一小时以后这对双生子又在交换着二十位的素数，至少我假定那都是素数，但我无法检验．[6]

二十位的素数？约翰和迈克尔真的能辨认这样大的素数吗？任何一个人，更不用说是低智商的人了，怎么能识别一个二十位的素数呢？我有一台386—25兆赫的计算机．即使用Basic语言中的双数精确算法，也很难检验十三位以上的数的素性(除非我愿意将机器老开着，让它一次算上几天)．这两个白痴学者是如何记住这二十位的数字的？更有甚者，又是怎么检查它的素性的？如果上述报道是真的，那么在这两个人的身上真的发生了惊人的事情，所谓惊人不是因为他们是智障者，而是说跟任何人的能力相比都是惊人的．

研究过约翰和迈克尔的经历的权威们同意这样一种观点，即这两个年轻人不可能也从未用经典方法通过对大数检验而找到素数．也就是说，他们没有在心里用较小的素数去除大数的方法来识别素数．他们不可能进行这种心算，因为他们甚至不会做很小数目的加法．此外，即使是检验一个六位的素数所须进行的心算也远非他们所能办到的．也不像是他们有意识地用了诸如乔治·比德尔将奇的合数看成平方差的方法，因为这个方法大量运用了加、减和乘法． [241]

那么约翰和迈克尔是怎么做的呢？我们根本就不知道．一个有趣的想法是：素数具有某种特征，它能够在心里被观察到，从而被人们识别为素数．也许这对双胞胎兄弟能在心里看到数并认出这种性质．我们希望有一天能够弄清楚约翰与迈克尔是怎样完成这种惊人的业绩的．不幸的是，我们不得不依赖其他白

痴"学者"或其他全新的研究方法以破解这个秘密. 1977 年,为了促进他们介入社会的进程,监护人将这对双胞胎兄弟分开了. 虽然他们在重返社会训练所这种环境下表现出其他能力有所改进,但两人中没有一个人再去做任何有意义的星期计算或是素数识别.[7]

所有这些说明了什么?

有些人也许会说,除了训练的时间,对数字的钟爱以及良好的记忆力之外,计算怪才与正常人没有什么不同. 劳斯·鲍尔(W.W. Rouse Ball, 1850—1925)是一位历史学家兼数学教师,剑桥三一学院的校友. 他在《计算怪才》一文中捍卫了上述主张.

> 表演确实令人吃惊,以至于某些观众认为这些怪才具有一种与同时代人绝不相同的功能. 这种观点是没有根据的. 任何一个具有出色的记忆力并天生对算术感兴趣的年轻人,只要他专心地、不间断地去琢磨数,并勤于练习,都能对心算十分精通. 自然,其中特别有天赋的人的表演就格外使人吃惊.[8]

42]

史蒂文·史密斯跟他持相同的信念,而且更强烈. 他宣称这类智力技能跟语言能力相仿. 因此,你只要有足够强烈的愿望并花功夫去学,就能成为一名计算家.

> 只要你有足够强烈的欲望……并且知道乘法表,那么我可以在一个星期内教会你开立方,在一或两个月内训练你掌握原理和基础知识,你就变成一个计算怪才了.[9]

鲍尔和史密斯关于所有计算家基本上跟正常人没什么差异

的论断正确吗？不是还有一些计算家，像约翰和迈克尔的能力超出了人类正常能力之外吗？仅考虑那些正常的或聪明的计算家，史密斯的论断可能是正确的．在适当的刺激与合适的环境中，大多数人能成为计算家．表演固然惊人，但形成这种技能的条件不外乎是过人的记忆力（这是可以训练的）、对于数的钟爱以及有充分时间去玩味数之间的关系．一个人在早年发现的数之间的关系通常会在脑中归并成一种计算的规则，后来就变成一种下意识的，几乎是即时的反应．

但当我们谈到那些孤僻和反应迟钝的人时，史密斯的假设就不够了．达罗尔得·特雷弗特博士认为，多种因素的结合造就了音乐和计算方面的这类"大学者"——特征大学者群体．考虑到这些白痴学者大多不会做一位数的乘法——甚至是加法和减法时，我们立刻就明白所谓玩味数字，然后使之内在化的解释是不充分的．计算"大学者"一般有三种与数有关的才能：(1)数字记忆，包括历法计算中的星期和日期的记忆，(2)识别素数和因子的能力，(3)表演快速或即时计算的能力．这些都像是下意识的能力，因为这些大学者完全知道他们正在做什么，但却说不出他们是怎么做的．

很多计算"大学者"的大脑左半球的功能受损．这可能是由于他在母体中或在童年时期的脑外伤所致．对于男孩，甚至可能是男性激素不平衡的结果，这种不平衡导致左半脑的连接神经的生长迟缓．特雷弗特认为，这种早期的左半脑损伤可能导致其 [243] 功能向右半脑转移．人在出生时成千上万个脑神经细胞因不能与其他细胞连接而相继死去，并不断地被大脑吸收．在人的进化过程中，似乎已形成了产生超量神经细胞的机制以保障永远有足够的脑细胞以实现必要的连接，未能和别的细胞联系上的多余的细胞会渐渐死去．也许当左半脑功能向右半脑转移时，有一些多余的细胞实现了连接，结果使得这些个体有更强大的右半脑．

正常人的起支配作用的左脑负责在语言、数学、推理、计划等活动中控制其线性过程.右脑控制那些即时的行为,诸如瞬间的视觉功能.左脑与右脑的不同功能有助于解释正常人与计算“大学者”之间的差异.这类“大学者”在处理线性过程(即一种有多个步骤组成的过程,每个瞬间只实现一个步骤)时会遇到麻烦;音乐的情形有些特殊,因为有时候音乐欣赏能力是由右脑控制的;他(或她)对于需要瞬间认知的事物表现出很强的能力,例如即时计数.

于是对于这些计算“大学者”,除了喜欢独处、对于数有兴趣和展示他们的能力这些特点外,我们又多了一些了解:他们具有一个功能与众不同的大脑,由右半脑来代替左半脑的支配作用.特雷弗特还指出,他们的记忆也与众不同,因为其紧靠大脑皮层下的区域受损了.他们的记忆范围狭窄但是很强.这从一个侧面解释了为什么很多“大学者”在思维时似乎有妄想的表现.然而,光有这个解释还不够,特雷弗特说道:

> 这些天才“大学者”经过长期的重复与实践,已形成了一套足以进行下意识演算的编码(虽然他们对所用的算法并不理解).然而,在这些非凡的“大学者”中,接近音乐规则和数学规则的人特别多,使人觉得这种接近必定由于存在着祖先(遗传)的记忆.在这些人中,这种记忆力带有遗传特征,跟一般的智力不同.[10)]

特雷弗特在这里引入了一种附加因素:对数学和音乐规则44】的异常记忆.然而,特雷弗特讲的记忆并不是指靠记忆回想过去的特殊事件.他所说的记忆是指由神经遗传获得的进行音乐和数学活动技能.他断言说,这种特殊的技能跟我们常人的智力风马牛不相及.当这些“大学者”的一般智力受损时,这些专门的技能反而会增强.基于他的研究,特雷弗特得出结论说计算“大学

者"跟正常人有重大的差别.右半脑的支配地位(可能包括由于增加神经的连接而使右半脑变得更为复杂),由正常的遗传获得的操作数学规则的技能,加上性情孤僻的环境因素以及对于数的兴趣,上述四种因素使计算"大学者"在对于数的即时领悟方面达到了新的深度.[11]

未来的计算

人们可以理直气壮地问:为什么还要用这些计算来烦人呢?我们可以打开计算机——按按键盘——结论就来了.但在一些大的算术问题中,计算过程可能比一下子得出结论更重要.它可以成为有效的数学洞察和对于数的深刻认识的基础.

历史上,有一些杰出的科学家和数学家曾是计算方面的神童,包括伟大的数学家欧拉、高斯和拉马努金.现代计算机与博弈论(有关最佳选择的数学理论)之父约翰·冯·诺依曼(John von Neumann)的计算能力也是非常出色的.

天才的计算家们有一个共同特点:他们喜欢去思考数和喜欢去玩味数.这种对于数的渴望在大量的数学突破中起了关键作用.我们已经看到早期毕达哥拉斯学派的人是如何摆弄石子,发现了数之间的种种关系.他们对于数的玩味导出了最早的一些数学定理.在较近的年代,即1792年,年仅15岁的高斯得到了数论中最重要的发现.[12]他被认为是所有数学家中最伟大的人物之一.他提出在自然数增加时,其中所含素数的个数可以表为一个函数$\frac{n}{\log n}$.这个函数后来成了素数定理的内容.高斯是怎【245】样想到这个函数的呢?他以一千个自然数为一组,从相继的若干组自然数中数清楚其中出现的素数的个数.由此看出的素数的分布状况使他得到了素数定理.因此,世界上最辉煌的智者之一高斯,是在勤奋地用最标准的平凡的计算去识别素数和计算素数的个数之后,做出他的发现的.

我们永远不可能知道有多少伟大的数学发现是在人们心甘情愿地坐下来并耐心地进行繁琐的计算后作出的.但这样的情况肯定是很多的.在科学研究中也不乏同样的耐心与勤奋.研究者为了取得有意义的突破,需要长年累月地收集和分析资料.因此,简单的计算在数学中是最基本的.20世纪的一些批评家对于计算机泯灭了人们对计算的兴趣而深表失望,认为我们又会步入数学上的黑暗世纪,因为未来的一代又一代人将丧失四则运算的技能.我持相反的看法.计算机不会排斥我们摆弄数的技能.相反地,它是一件宝物,因为它起的作用犹如将我们自己的大脑延伸.现在我们每个人都能籍着家用电脑而成为计算大师.计算机为我们提供了对于数的新的洞察比做乘法和因子分解本身更为重要.形形色色关于数的问题,普通人以前可能从未考虑过,因为它们需要用到复杂的计算,现在这些问题可用几分钟或个把钟头编个程序而得到答案.此时所需要的仅是对于数的兴趣.

246]

确定问题的内涵

在探索数的路上我们已经走得很远了.我们从自然数开始,考查它们的起源,并将我们的概念扩展到了分数、无理数、复数以及超限数.我们甚至思考了其他种类的数该如何计数.现在我们要问:什么是最一般意义下的数?这实际上不是数学问题而是一个哲学问题.正因为如此,所以我们必须特别小心,以免陷入无休止的哲学争论的泥沼而不能自拔.

数学中的大多数概念是不难理解的,因为它们都是建立在容易弄懂的简单的定义和特定关系之上的.数学哲学则困难得多,因为它迫使我们离开数学的证明和计算,去探讨比直观概念更深刻的问题.此时我们主要关心的是:数以什么方式存在?它对于我们生存于其中的宇宙意味着什么?本体论是专门研究"存在"问题的,于是我们要去弄明白数的本体论问题.整个问题的基础在于:如果数是存在的,那它是怎样存在的,它是独立于人类存在的吗?当然,这里所说的存在并不是像毕达哥拉斯学派所主张的那样,说数是在时空中移动的物质对象.我们绝不能在大树的后面或石头底下找到数3.我们的意思是:是不是数学对象(无论这些对象到底是什么)存在于某种关系中,而这种关 [247] 系是独立于我们脑海中所想像的这些对象与关系的?换句话说,数学真理是不是作为我们所生活的宇宙中的真理存在的,而

与我们自身是否存在没有关系？

你马上就能看到，我们已经打开了一扇通向难缠的存在性概念的大门．众多的哲学家为了搞清存在这一概念究竟意味着什么，已经互相辩论了二十五个世纪，整个哲学的发展也一直建立在对本体论的专门解释之上．我们绝不会匆忙地对涉及本体论的所有问题给出一个随随便便的答案．否则，我们很可能落入空想的误区．短短的一章，不可能解决有关数的所有哲学问题．也许最好的作法是描述一下有关数的本体论问题的大致轮廓，以使我们对于数有更清醒的认识．总之，我们将不去考虑任何关于数的最后答案，但我们也不会胆小到不敢对数的本体论问题进行一番自由的思考．

作为思考的基础，我们先来定义从本体论角度看待数时的两种观点，分别称作最高观点与最低观点，并希望最后的答案处于这两个极端的观点之间．首先说最低观点：数仅存在于人类的头脑中．如果人类不存在，数也将不复存在．或更确切地说，如果不存在思想实体，则数也不存在．数与其他所有数学真理都只是我们思想中的事物．要真的是这样，那么它们作为思想的存在物，跟独立于我们思想的任何东西的存在性都毫无关系．宇宙中本是“没有数”的，人类给这个没有数的宇宙强加上了数．这种观点在数学上称为构造主义，在哲学上称为实在论，它强调我们靠智力构造了数——它们不属于非人的宇宙．

现在再说说最高观点：数是思想活动的对象．他们不是思想自身，而是思想活动所考虑的对象．思想活动的所有对象（包括数）与某个个人的思维行为无关．这些思想活动的对象在头脑之外，它以完美的方式存在着，更胜变化的宇宙一筹．因此数与其他思维对象构成一个由真理组成的理想宇宙，这些真理是对普通的、变化中的物质世界的反映．事实上，物质的宇宙只是一场幻觉．真实存在的只是概念的世界．这种最高观点称为古典理想主义或柏拉图主义．

关于理想主义和实在论,我们只给出了简单的定义,并不打算对定义的合理性作详细的阐述.在继续往前探索之前,我们要引入几个术语,这对于防止我们误入歧途是很有益的.我们沿用20世纪伟大的哲学家、数学家伯特兰·罗素(Bertrand Russell)的术语:

- 感觉素材:我们周围世界输入你感觉器官的事物,诸如声音、颜色、味道、质地等等.
- 感知:我们对于感觉素材的意识.即我们对红的、硬的、甜的等等经验的直接的认识.
- 物质对象:指我们相信它们存在于物质世界中的假设的对象;我们还认为它们是感觉素材的起因.一个苹果是一种物质对象,我们推定它在我们面前,因为我们有了对一种特殊的圆的,红的和硬的事物的感知.
- 概念:概念是思想活动的对象.概念不是来自感觉素材,我们也不能感知它.我们只能在内心来想它们.
- 思想:是对概念的一种专门的认识.
- 共相:存在于概念世界的对象,我们假定它们是我们思想中的特殊概念的起因.共相包括数,诸如 π 这样的数学关系,可能还有其他诸如道德、自由、新鲜、喧闹等等非专业的属性.

我们在图52中展示了这些定义的关系,其中用大方框围住的部分代表我们的意识.意识内部包括对感觉素材的直接的经验性感知,然后假定这些感觉素材蕴涵着框外的物质对象的存在.相应地,我们具有关于各种概念的思想.对应于我们内心的概念的意识框的外面,存不存在共相呢?当然,我们也有理由问:是否存在对应于我们内心的感觉素材的物质对象呢?哲学【249】家们坚持说,我们永远不能确认意识框外面的东西是什么,因为所有我们经验到的东西——感觉素材及思想都是在框的内部发生的.正是由于这个原因,我们用粗的黑线将共相的世界及物质

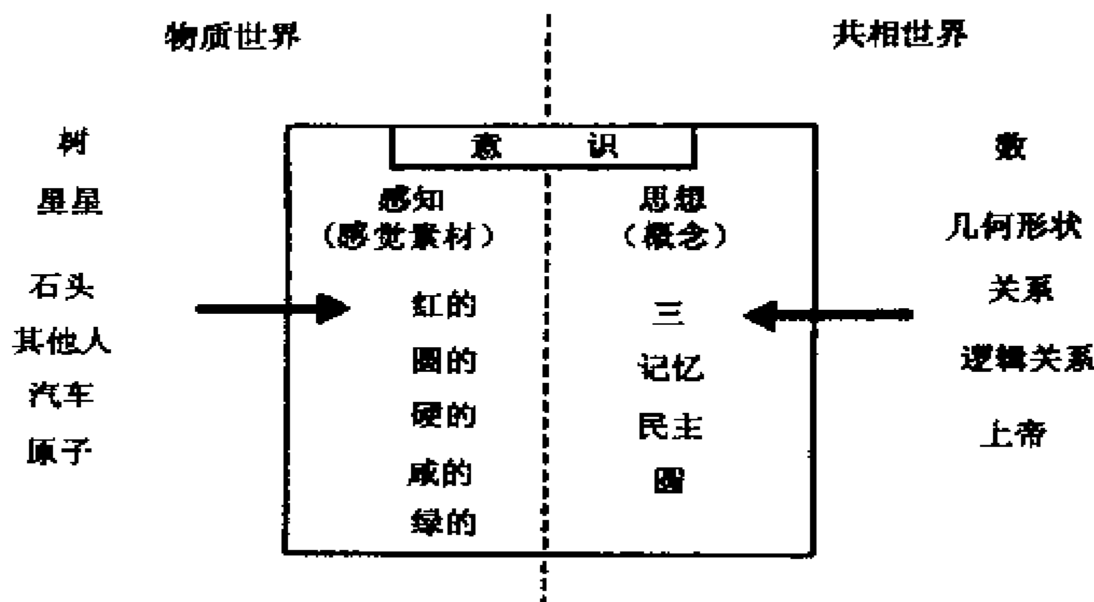


图 52　意识的象征性表示.

世界都跟我们的意识世界分开.我们用虚线将感觉素材与思想分开,表示我们还不能确认两者之间的精确差别.对外部世界的两大部分也一样.它们真的能够被区分开吗?如果是,又是怎样区分的呢?图 52 只给出了一个简单的框架,因而留下了许多尚无答案的问题.例如记忆属于思想范畴还是属于内部感觉素材?感情又是什么?

我们大多数人的世界观属于朴素的实在论.这种观点认为,宇宙中的物质世界跟我们感知到的一模一样.我通过后窗看到窗外的树真的很高,像个圆柱体,有褐色的树皮和绿色的叶子.然而,当我们仔细地考察朴素的实在论时,问题便迎面而来,最终我们会得出结论说,物质世界并不跟我们察觉到的一模一样,

250] 18 世纪的哲学家贝克莱大主教(Bishop Berkeley,1685—1753)作出过一种经典的解释.他在其作品《海拉斯(Hylas)与菲洛瑙斯(Philonous)的三次对话》中详细解释了这样的观念:我们通常归于物质对象的属性实际是人类感觉器官的属性.据此,贝克莱得出结论:世界从本质上说不是物质的,而是精神的.

德国的理想主义者伊曼纽尔·康德(Immanuel Kant)提出一

套术语以描述感觉素材与产生它们的对象之间的差异.他称感觉素材为现象,而称产生它们的对象为本体(noumena).他断言,因为我们真正能了解的只是现象,所以对我们来说,本体永远是个秘密.

按照最严格的构造主义观点,我们会说图 52 中框外的每样东西都是物质对象.当一个人死的时候,这个框子也就破碎了,留下的是恒星,行星和石头的世界.简言之,这就是唯物主义.按照古典理想主义或柏拉图主义的说法,在意识框架外的每样东西都是一种共相,这些共相即生成了我们感知的感觉素材,又生成了我们思想中的概念.

无论你接受哪种世界观都会引出哲学上的困难.所以我们可以选择一条中间路线,既承认物质对象的存在也承认共相的存在,这种观点被称为二元论.虽然这种策略并不能解决哲学上的困难,不过大多数人会觉得采取这种中间路线比较舒服.大多数人都不会接受"物质的宇宙不存在"这类愚蠢的概念.另一方面,如果仅接受唯物的自然观,我们也会觉得不太舒服.因此,对我们来说,既接受物质世界同时也相信由共相组成的第二个世界才是稳妥而又舒服的办法.我们常将这种共相的世界想像成是一个精神王国,它不仅包括共相,还包括精神实体,如死者的灵魂甚至于上帝.

然而,上述观点可能引来更加复杂的问题.请看图 53.我们在这里展现了框内与框外之间的一类过滤作用,它反映了这样一种想法:世界的概念化(包括共相世界和物质对象的世界)依赖于人类自身的构造.这就是说,我们之所以能以我们的方式去看去想,皆起因于我们的构成方式(或是物质的或是理想化的存在).此即所谓的自我中心态(egocentric predicament).在生物学意义上我们这样来理解自我中心态:我们的大脑及其亿万个联络神经的特殊结构,决定了我们如何去认知客观实体.难道我们有多大的意识结构就决定了我们了解事物的方式吗?我们是否 【251】

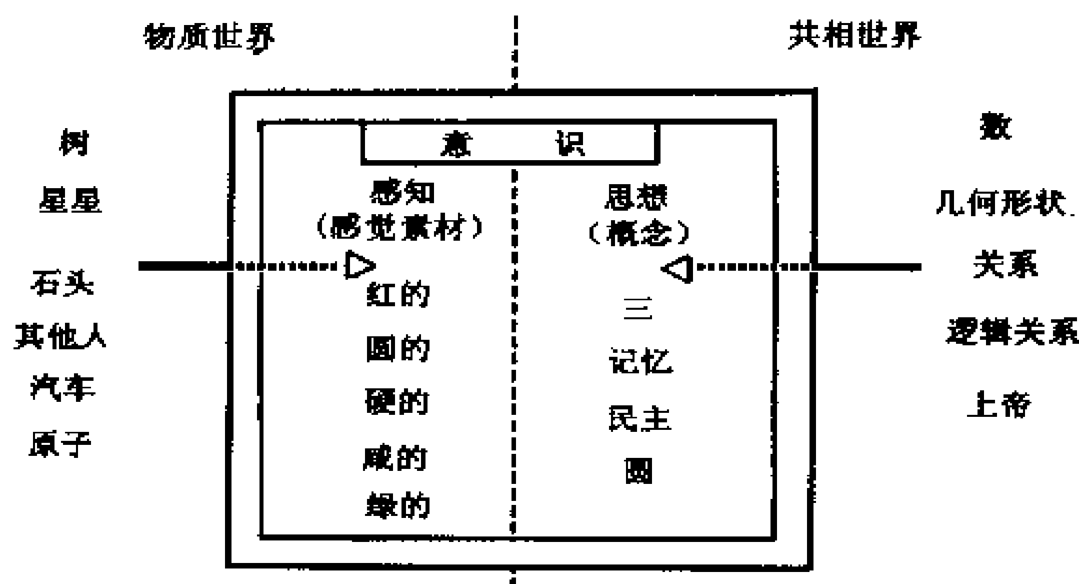


图 53　过滤的意识的符号表示.

相信物质对象以某种特别的方式存在，主要是因为我们具有这种结构？数之所以成为我们思想活动的对象也起因于同样的结构吗？

如果我们在讨论数的本体论问题时持保守的态度，我们可以采纳这样一种观点，即我们只确信感觉素材与内心思想中的概念的存在，因为我们只能直接感知这些东西.没有人会说自己看见了绿，因为事实上只是感受到了绿.绿是一种感觉素材.所有意识之外的东西(假定我们所谈的内部与外部有意义的话)仅仅是第二类存在；一种依赖于我们的直接感知的存在.这并不是说我们的直接感知(感觉素材和思想)引发了这些外部对象的存在，而是说我们可以从感觉素材和思想推断出有关外部对象的知识.

252】　那么，为什么我们既相信物质对象又相信数呢？(数是共相的经典代表)？我们相信物质对象的理由是显然的：只有我们相信了，我们才可以对有关行为作出判断，使我们能取得成功.如果我们企图不去理睬物质对象，那么我们的存活能力会减弱.如果按照某种世界观看到物质宇宙中的客观实体运转良好的话，

这种世界观会增强我们的存活能力.

数的情形又是怎样的呢？有什么理由能让我们相信数存在于我们个人的意识之外呢？现在我们将再一次回到我们讨论的基本问题上来.

历史的进程

要是人类自从有了足够聪明的大脑以来就一直在思考这类问题,那该是够浪漫的.我们可以设想在几万年前,一些人坐在树荫下争论眼前这棵树是否真实存在.不过,有关这类哲学讨论的最早的证据是古希腊人提供的,他们很有远见,将他们的思想记录下来,这样我们才了解了他们的观点.我们已经看到,毕达哥拉斯学派相信物质对象是直接由数构造出来的.因此,在他们看来,意识之外的物质对象具有一种基于物质的数的极微小的结构.这意味着数不仅占领着精神的共相世界,而且占领着物质世界.柏拉图相信存在着理念世界,它里面有完美的且永存的共相,在与空间适当地交融后便给了我们这个物质世界.

从柏拉图时代以来,哲学家们总是结合成不同的阵营:有一些倾向于实在论,另一些主张理想主义.无论在西方文化还是在东方文化中,宗教一般都支持钟情于理想主义的一派.中世纪黑暗时代的基督教神学家们,将柏拉图与亚里士多德的观点结合起来,不仅宣称上帝创造了物质世界,并且鼓吹上帝的无穷智慧通过不断的思考保持着所有共相的存在.因此,即使所有的人都死了,圆的概念也不会消失,因为关于圆的共相保留在上帝的心中.

甚至进入了20世纪后,我们还能看到这种全能上帝的概念 [253] 和共相的概念之间的密切关系.康托尔证明,不存在最大的超限数.所有的超限数都小于上帝所具有的无限和不可描述的性质.上帝是绝对的无限,在上帝与有限世界之间存在着超限数这种较小的无限.大多数19世纪的与20世纪早期的数学家都是理

想主义者，他们相信数学对象(包括数)具有客观性.现在的情形呢？数学家们如何看待处于数学中心地位的数的呢？

如果我们拉住街上一位平常的男人或女人，并问道："数是独立于人类而存在的吗？"我们大概会得到否定的答案.如果我们将问题改头换面，并问道："圆的直径与它的周长之比是独立于人类存在的吗？"我们得到的答案就会参差不齐.如果我们向纯粹数学家提出这两个问题，大多数人将回答"是的，它们作为真理先于人类存在，或者说它们的存在是独立于人类的".由此看来，街上的普通男人和女人更倾向于唯物主义；而数学家，特别是纯粹数学家却倾向于理想主义.这是为什么？

我们所说的存在的含义是什么？

如果我们希望弄明白数是否存在，那么就要复习一下*存在*这一性质到底指的是什么.当我们说某物存在时，我们的确切意思是什么？我们来考虑物质对象.我们为什么相信物质对象存在于我们的意识之外？首先，我们的感觉素材具有一贯性.无论何时当我走进我的起居室，那儿总有一只沙发.如果我转身背对它，然后再转回身——它还在那儿.这种经验是一致的.如果这个沙发某一时刻在这儿，下一时刻当我们再向同一位置观看时，它已消失，我就会开始怀疑这个沙发是否真的存在过.这种看法对世界上任何物质对象都适用.我们知道它们在那儿.如果它们消失了，我们期望得到合乎道理的解释.它们并不是偶然出现又随便消失在我们的世界中的.因此物质对象是有前后一贯的感觉素材所描绘的.

54] 数学对象是否具有同一品质呢？数学对象不占有专用的位置和时间，所以我们并不奢望能在我们的感觉素材中找到它(虽然特殊的感觉素材可以使人想起某种共相).可是，数学对象确实具有一贯性.自然数总是整齐地按序排列，它们之间的各种关系总是固定不变的.一个圆的周长与直径之比是一个不变的常

数(这就是说不存在一个可以改变 π 并改变我们对 π 的记忆的恶鬼). 因此, 正如物质对象的感觉素材一样, 数学真理确实呈现出一致性.

存在的第二个性质是独立性. 物质世界中的对象不会由于我们想着它, 它就出现. 下面是一段我们在未知领域探险的戏剧性描写: 我们沿着森林中的一条小径散步, 为眼前的一切兴奋不已并等待着下一个拐角处的景色给我们以更大的惊喜. 其实, 我们并不知道什么样的景色在等待着我们. 因为这些景色从未在我们的眼前存在过. 因此, 我们是被引向了这样一种信念: 即使我们没有走到下一个拐角处, 那些视力所不及的景色仍旧是存在的.

奇怪的是, 数学中也有同样意义下的发现. 正是这种亘古不变的发现的经验, 使很多数学家相信: 他们所追寻的数学真理在被发现之前就存在了, 而且将继续存在下去. 例如, 如果 π 是我们思维的发明物, 那么我为什么不知道它的小数展开的第一百万位数字呢? 为了知道这一位数是什么, 必须做大量的数学运算去"发现"它. 当然, 构造主义者会说, 在人们算出 π 的小数展开的第一百万位数字之前, 它是不存在的; 这一时刻到来之前它只是一个潜在的数字.

毕达哥拉斯的那名信徒发现正方形对角线与边是不可公度的, 这也属于同一种类的发现. 这不是他(或她)定义出来的概念, 而是他(或她)发现它们具有这样的性质. 即使数学家们想要批判数学是客观存在的这种主张, 他们也无法摆脱心理上的自责, 因为他们总觉得自己是在发现而不是在搞发明创造. 有一点倒是真的, 纯粹数学家们在创造新的数学体系: 他们发明一些公理, 然后去发现蕴涵在公理之中的定理.

有没有能跟"被发现的"数学世界形成鲜明对照的纯粹发明的例子呢? 看看我们的英语, 它就是纯粹的人类发明. 我们将字典视为各种定义的汇集而不是讲述真理的书. 如果我们突然遇 【255

见从银河系中心来访的高智商生物,要是它操着一口英语,我们将会十分震惊.英语是我们发明的,我们很难相信任何别处的人能够独立地发明跟英语一模一样的语言.

数学的情况就不一样了.如果其他高智商的生物没有数的概念,我们会不会惊讶?我们不是相信数具有如此的普遍性,所有高智商生物都应该知道的吗?在很多科幻作品中,人们都假设跟外星人交流的最完美方法是利用数学这种“万能”的语言.要是果然如此,那么数学真理就不会仅仅依赖于人类的发明了.

然而,这并不能下断语说理想主义比较符合实情.事实上,我们从未遇见从别的星球来的生命.要是真的遇到过,我们很可能惊奇地发现他们并没有任何可与数学相比照的技艺.或者说,也许只有能够创造一种与我们的数学类似的学问的生物,才能使他们的科学发展壮大,达到足以做太空旅行来访问我们的地步.我们曾谈起鲸鱼和海豚的巨大的大脑.蓝鲸的大脑有 15 磅重,他们会不会数出游过面前的鱼儿的条数?也许这些海洋生物有一种很复杂的和高智能的文化,但缺乏对数学对象进行概念化抽象的能力.我们可以认为数学真理是放之四海而皆准的共相,因此所有有足够智力的生物都可以发现它;然而在现实中,数学真理只是人类的心智如何运作的一种反映.

我们所谓的存在的第三个性质涉及感觉素材的品质.我们知道感觉素材不等于思想事物.我看到的绿,具有我思想中的绿所缺乏的丰富的定性的信息,感觉素材确实具有思想事物所没有的某种效力.仅从这个事实我们就可以推断:感觉素材背后的对象是真实存在的,而我们的思想事物背后的对象并不存在.然而这还不是反对理想主义的决定性的例证.我们的数学思想含有感觉素材所不具备的精确性,我头脑中的圆的概念(欧氏空间中所有距一个点为等距离的点的轨迹)是那样的完美和精确,没有一种感觉素材可以达到这种境界.当我想到圆的时候,我就能在心中看到一个圆形的点集,但这种反应只是一种辅助手段.它

们没有表示出我关于圆的概念——我的圆是一种共相，是不受时间和地点限制的．

有一个有趣的问题：当我们不在想圆的时候，我们关于圆的思想到哪儿去了？当我们背对沙发时，关于沙发的感觉素材没有了，但我们相信这个物质的沙发继续存在着，并随时准备当我们面向它时提供更多的感觉素材．当我们不在想圆的时候，圆的概念到哪儿去了？是不是每次都要去重新发明或重新发现它，并进入我们的意识？我们假设圆的概念储存在我们的记忆中，需要时可以随时召唤它．如果圆的概念储存在记忆中，那么在我们的大脑中一定会有一组专门的神经元用来寄存这个概念．当这些神经元受激发处于兴奋状态时，圆的概念就进入我们的意识中了．因此，圆的概念在物质世界中有一种生物的相似体．这种相似体必定是精确的：当我们想到"圆"，我们不是在想像近似于圆的一种圆形的东西，而是从记忆中想到了准确的圆．实际上我们有关于圆的精确的概念（或定义）存在于记忆中．如果我们的圆的概念在物质世界中有一个准确的生物类似物，那么所有的概念都应该在物质世界中有它们的准确的类似物．

罗素在他的一本名为《哲学问题》(The Problems of Philosophy)的薄薄的书中提出了一种现代的二元论．为了建立他的理论，罗素首先描述了共相的存在，并把它们说成是各种关系：物质对象之间的关系，或是其他共相之间的关系．然后他说，接下去的问题就是确定这些关系是否独立于人类的心智而存在——这正是使我们处于进退两难境地的问题．他肯定地说，它们事实上就是独立存在的．

> 我们可以假设，对于爱丁堡位于伦敦北面这一事实，事先并不需要假定存在任何相应的思想事物．但是，这一事实涉及到"在……北面"这一关系，它是一种共相；所以就整个事实而言，作为它的组成部分的"在……北

> 面"这一关系确实涉及思想事物，因此你就不能说整个事实与思想事物无关.因此，"在……北面"这一关系根本不同于(物质对象)这种事物.它既不占有空间也不占有时间，既非物质又非精神；不过，它总是某种事物.[3]

57]

罗素总结说，因为宇宙中充满了各种事物，这些事物彼此之间有一定的关系.这些关系本身并不是物质对象，也不是人类头脑中的"思想"，因此有一种与两者多少都有点不同的独立的事物存在.它们存在于共相组成的世界中.不过罗素推出这个结论的速度太快了，他的论证缺乏严谨性，不能令人信服.在他谈论伦敦－爱丁堡的例子时，有一个问题被他忽略了：此例中的"在……之北"这种关系是有赖于某种智力或精神活动的，这种精神活动是指对伦敦和爱丁堡作为物质上不同的事物所作的定义.一旦有了这样的定义，我们才能使用"在……之北"这样的关系.此时的关键在于要相信宇宙是由不同的、离散的事物组成的.而事实上，我们的宇宙完全可能是一个连续的流形，只有靠智力才能将这种连续体加以区分，分成不同的对象.因此，我们所论的关系是依赖于这种区分是如何发生的，它存在于这种行为之后而非之前.

杰里·金(Jerry King)是一名现代的构造论者.他写了本很棒的书：《数学的艺术》(The Art of Mathematics)，他在书中说：

> 数学家们是做数学的.他们在做数学时研究那些他们已经创造出来的对象.这些对象是抽象化的而且只存在于数学家的想像之中.他们自己的创造物给了他们勇气和力量，数学家就具有这种特征.数学家利用逻辑规律和数学法则从那些被选定的性质出发推导出其他

性质.[4]

但杰里·金并不想完全抛弃理想主义者的立场,因为他还在通向理想主义之门上开启了一条缝隙.他谈到一个奇怪的现象,即数学虽然在数学家的头脑中产生,却极其有效地模拟了物质世界.

> 然而,创造者们不能解释为什么某些最纯粹最抽象的数学结构能得到反复的应用.例如黎曼几何,它就如人们熟知的欧几里得几何一样,是从一组公理按数学的严格推理建立起来的.[5]

此外,杰里·金还提出了一种想法,即存在一类神秘的法则使那些优美的数学形式具有最普遍的效用.

[258

> 而且,似乎存在着一种更高的神秘的美学法则,它告诉我数学思想的优美程度和它的正确性及重要性之间有着必然的联系.或者如哈代(Hardy)所说,在(数学)思想的美和它的严肃性之间有着有机的联系.[6]

该如何理解这个神秘的法则呢?我们无法讲清楚,因为这一法则蕴涵着一种只可意会不可言传的真谛.如果说这个神秘的美学法则在数学思想的优美与它的正确性和重要性之间建立了有机的联系,那么到底是数学家发明了这个法则还是它本来就存在着呢?这么问,好像我们正在讨论一种对象之间的关系;听起来,这种关系的存在还是与人类无关的.

我们将尝试着来叙述构造主义者的观点,并希望能给以恰如其分的评价.宇宙是一个连续的流形,没有预先规定好它分成多少部分.在某种意义下它是无缝的.当我们作为智能生物在宇



宙中生存时，基于自身的生物学构造，我们将它区分为离散的事物．一旦这样做了之后，我们就在这些被区分好的事物之间确定了种种关系．因此我们定义的关系（共相）是我们的专用品．另一种智能生物可能使用不同的方法来区分宇宙，这时就会出现不同的关系，从而有不同的共相．所以说，共相只存在于确定它们的智能生物的头脑中．

从上面这段话看来，构造主义者的观点挺有道理．为什么它没能使我完全信服呢？也许你信，但我觉得还是在毫无确定性可言的海洋中游荡．如果我们假定任何一种智能生物为了获得关于宇宙的知识，必须首先将宇宙流形区分成一个个不同的事物（而不是将宇宙视为一个有机的统一整体——多么美妙的一种图景），那么我们就得承认区分本身应该包括如何去认识那些离散的对象．假定这些被区分的对象是我们人类所特有的，我们当然可以将它们归类成各种汇集或集合．一旦有了集合，我们就可以来问集合的大小——于是出现了数！我们所谈论的对象到底是什么并不要紧，要紧的是我们已经把宇宙分成了这些离散的对象．因此，如果在另一个银河系生活着另一类智能生物，他9]们可能以完全不同的方式来区分他们那个世界；只要有区分，就会有集合和数，不管他们是如何称呼它们的．由此看来，我们似乎不可能避开集合和数这些基本的概念．在讨论由离散对象组成的宇宙时，这些基本概念似乎是作为宇宙中的基本法则而存在的，这就是我不能完全信服构造主义观点的理由．然而，其对立面——经典理想主义也令我感到不舒服．也许最安全的路是二元论——同时接受物质宇宙与共相世界．

沃尔迈斯特（W．H．Werkmeister）所著的《科学哲学》一书也论及了数在宇宙区分中是最基本的观点：

> 只要我们睁开双眼，我们视力可及的范围中呈现出形态各异、色彩多样、深浅不同的景象，以及由此联想到

的各种概念.这就是说我们发觉了可辨认的对象.这一事实说明,我能够将某个具体的对象跟所有其他的对象区分开来,被区分出来的对象是自我认同的"某种东西",在此意义下,它是"一".[7]

对进化的眺望

至此,我们还是没有回答最初提出的问题:数是否独立于人类而存在?我真觉得很难回答它.我们至多能说,我们一直在试图以更有意义的方式来谈论这个问题.有时,从进化的角度来看待一个问题是有益的.数学是怎样成为我们的文化的一个组成部分的?这对理解数的本体论问题又有什么意义?

人类在搬运东西时,会注意到对象的汇集具有一种与其中的对象无关的性质——这就是汇集有多大的性质,数学即由此开始.于是,数就诞生(或被发现)了.最初,数用于描述有限对象的汇集,如一"双"手套,一"对"牛等等.数学的成长依赖于抽象化的过程.当数学变得更抽象时,也就更具普遍性——可以应用于更多的不同的汇集.这种抽象贯穿于我们进化的整个历史中.除了抽象之外,数的范围也在扩展.最先只讨论有限汇集和有限 【26 的数的序列,后来,我们领会到自然数是无限的——这个概念是无法由感觉素材得到的(因而受到了长达数千年之久的激烈反对).

然而,数的扩展还在继续.数的家族中又出现了分数,而后有了负数.无理数和超越数也加入了这个家庭.然后又出现了复数、超复数,以及超限数.这种抽象化及扩展的双重过程标志着数学概念的进步.我们能说我们已经达到终点了吗?当然,每一代人中总有人坚持说这个过程已经完结了.谁能想像到下一步会往何处去呢?因为我们仅仅是站在知识与文化发展的某一个台阶上,所以我们应当假定我们的数学以及数的概念还是不完

全的.对于数的这一看法将会推动我们进入一个个新的未知领域.

人类本性的更多的展现可能会使我们对于数的本体论这一难题提出完全不同的解答.让我们假定,数的概念在某种程度上是我们作为人类所作出的一种反映,即它与我们独特的生物学构造有关.于是问题变成了数的概念中有多少是纯人为的,又有多少具有普遍性?对于集合也存在类似的问题.最初我们假定宇宙必须遵循欧几里得的规则.后来,我们发现了非欧几里得几何学.究竟宇宙是遵循欧氏几何还是遵循某一种非欧几何呢?爱因斯坦在他的广义相对论中采用了一种非欧几何.然而物质宇宙遵循的几何可能根本不是我们所发现的任何一种特定的几何:空间可能是比任何特定的几何更一般的流形,这样一来,我们便可以具体地来选用我们所希望的几何.

类似地,有关宇宙的真理可能远比数学中的数和圆更具普遍性.如果我们到了由其他高智能生物组成的另一个社会,我们可能会被他们专用的数学搞得稀里糊涂.在他们的数学和我们的数学的背后可能存在着更深刻的真理——一类更高水平的"元数学".我所谓的"元数学"并不是通常所说的对指导数学符号应用的法则的逻辑研究,我指的是一种有更深刻、更广泛意义的活动.我们的数学与外星人的数学都应是这种元数学的特定的具体实例.

我们一直在努力揭示数的重要地位,所用的是逻辑分析的方法.使用这种方法是适宜的,因为数是思维的对象.然而,如果我们从漫长的历史中去了解它,就会知道那是一种危险的做法,因为物质世界并不总是按照逻辑推理的法则行事的.概念是以逻辑的方式彼此相关的,而各种由概念组成的集合可能是相容的也可能是矛盾的.当我们试图用逻辑上相容的方法讨论物质宇宙的方方面面时,我们常常会被引入歧途.为了理解为什么会出现这种情况,我们必须记住,我们关于物质世界的概念构成了

一个模型，我们是在这个模型中推导出逻辑结论的，然后我们希望物质世界能符合这些结论．当我们的感觉素材与这些逻辑结论不同时，我们常常丢弃感觉而不是去改进我们的模型．

巴门尼德和芝诺相信世界是永恒不变的，按他们的逻辑，运动只是一种幻觉．所有处于运动中的物质对象的感觉素材可以忽略不计．在一段时间内，将世界想成是平的这种看法也被认为是合理的，因为我们有关现实世界的模型能使我们逻辑地推导出这一结论：如果地球是圆的，像一只球，我们不就会掉进茫茫的虚空中了吗？相信只有十个天体存在的信念也只可能是“逻辑”的结论：“十”是个神圣的数字，所有的天体都已计入其内．于是，伽利略因宣布看到了木星的卫星而遭监禁也顺“理”成章了：伽利略的感觉素材必定是错的，因为存在十个以上的天体跟上述说法矛盾．

如果我们能够肯定什么事情的话，那就是宇宙绝不是按我们的逻辑推理的结论行事的．当我们所经验到的感觉素材与我们描绘现实的模型相悖时，我们必须重新考虑我们的模型．如果宇宙是完全合乎理性的，那么圆周与直径的比大概应是 3——干净，清楚又精确——就是那个 3．至少，要是由我来创造宇宙，我大概就会把 π 选作 3．但我很高兴宇宙不是我创造的．对我来说，去发现真正 π 的值比起我自己想像出任何数都更激动人心，也更加有趣．【262

第15章 数的过去，现在和未来

进入20世纪

讲过乔治·康托尔在19世纪末做的有关超限数的工作，我们有关数的发展的正式讨论也就告一段落了．康托尔的工作代表了数的概念的最后一次扩张，不过故事还没完结．除了戴德金的无理数定义和康托尔的超限数定义，数学在19世纪还有其他重大的进展；其中一项是非欧几何的发现①，第二项则跟本书的内容有关：试图将所有的数学奠基于公理之上．

欧几里得的工作是这方面努力的范本：欧几里得由一组公理和公设出发，来推导古典几何中的所有定理．数学家们希望，他们能找出一组公理，并由此逻辑地推导出关于算术的所有真理．要是这一希望实现了，加之数学的其他一切领域都能从算术中推演出来，那么整个数学大厦就一劳永逸地获得了一个坚实的基础．这组公理必须具备两个性质：它们必须是完全的，即它们足以导出算术的其他所有相关的性质；它们又必须是相容的，即由公理导出的定理绝不会是相互矛盾的．要是会导出相互矛

① 原文在此处的说法有误．原文为：… There were other great mathematical developments occurring during the last half of the twentieth century. One was the discovery of non-Euclidean geometrie. ……现据史实加以改正．——译注

盾的定理,那谁还相信数学呢?

在 1889 年,意大利数学家朱塞佩·皮亚诺(Giuseppe Peano)找出了一组公理,共五条,可用来推导出算术的所有定理.这些公理简单明了:

1. "一"是一个数.

2. 若 x 是一个数,那么 x 的后继者也是一个数.

3. "一"不是任何数的后继者.

4. 若两个数具有相同的后继者,则它们相等.

5. 若一组数包含数"一"且包含其成员的所有后继者,则这组数包含所有的数.[1]

在这组公理中,皮亚诺使用了未加定义的数的概念和后继者的概念.但是很显然,皮亚诺在他的公理中讲的数是自然数.他从这组简单的公理和第一个自然数"一"出发,来定义所有的自然数,由此就有可能导出其他种类的数及其关系.这么简单的公理居然有如此强大的功能,真令人吃惊.它既不含混也不复杂,而是把自然数的最基本的概念加以具体化:从"一"开始,然后依次到达一个个后继数.第五条公理是所谓的归纳法公理.它的意思是:当我们能对"一"及随之而来的每个后继者证明某个性质成立的话,那么该性质对所有的自然数都成立.注意,皮亚诺和其他数学家在叙述和使用这些公理时都要用符号并按照严格的逻辑法则来表示,我们在上面只是用普通的语言给出了一种等价的说法.

伯特兰·罗素和艾尔弗雷德·诺斯·怀特海(Alfred North Whitehead,1861—1947)继续为建立数学的公理基础而努力.他们在合著的《数学原理》(Principia Mathematica)中将数学的公理化跟形式逻辑联系在一起.要是能完全实现这种联系,那么追根寻源,所有的数学都可归结为逻辑中的基本公理.现在的问题是数学能做到这一点吗?

【264】

悖 论

不幸,从公理导出一切数学的计划并未能如皮亚诺、罗素、怀特海和其他人之愿顺利实现.他们努力建设的宏伟大厦出现了裂纹.最棘手的问题是发现了悖论,它是由于采用了关于集合的直观概念造成的,而集合的概念正是新的公理化数学的心脏——我们就是用集合来定义数的概念的.

我们已提到过第一个悖论,即康托尔悖论:不可能存在最大的超限数.设 Ω 是包罗万象的集合(即它包含所有其他集合)的基数.这个巨大的集合不仅必须包含它自身,还要包含它的所有可能的子集.因此,该集合的基数必定大于 Ω.事实上,它至少是 2^{Ω},而这跟它的基数应等于 Ω 的断言相矛盾.当然,有个简单的办法可以避免这个矛盾:拒绝承认有这种最大的集合或最大的基数存在.

罗素也发现了一个隐蔽在朴素集合论中的悖论,要解释清楚这个悖论得费些周折.我们可以构造一些集合,它们的成员也都是些集合,若我们令 A 是所有的左撇子棒球击球手组成的集合,B 是所有公鸭组成的集合,那么$\{A,B\}$表示的是由这两个集合(即集合 A 和 B)组成的集合.罗素造出一个集合 S,其成员也都是些集合.他说,一个集合能够成为 S 的成员的条件是它不包含自身作为其成员.若 $S=\{s_1,s_2,s_3,\cdots\}$,那么每个 s_i 都是这样的集合,它不把自身作为它的成员.于是,罗素问道:我们应不应该把 S 当作是 S 的成员?如果 S 不包含其本身,那么它应该是个成员.但是当我们把它当作一个成员时,它就包含了自身,因此按定义就不可能是一个成员.可是当它不是一个成员时,它又应该是了!这是个不折不扣的悖论.所以不可能有像 S 这样的集合存在.

罗素的悖论说明,关于集合的直观概念导致了矛盾,因此数学家必须仔细考虑定义数的方法,而不能像朴素集合论那样随

意行事.这就引出了20世纪的形式化的公理集合论.

罗素的悖论鼓舞了其他人去寻找存在于我们的直观概念中的悖论.有一些悖论既令人吃惊又十分有趣.我们来看看汤姆森的点灯悖论,这是英国哲学家詹姆斯·汤姆森(James Thomson)于1970年想出来的.[2]我们设想有一部能开灯和关灯的完美的机器.首先,我们让一盏灯开一分钟.接着关半分钟.然后,这盏灯再打开四分之一分钟,接着关八分之一分钟.这一过程继续下去,无论让灯是开是关,每次的时间都是上一次的一半.两分钟过后,我们就得到了一个开和关的时间组成的无穷序列.试问两分钟后灯是开着还是关着?

另一个精微的悖论是根据罗素最初的悖论设计的:有一座村庄,那里只有一名理发师.这位理发师给所有那样的人刮脸:他们不给自己刮脸.试问谁给理发师刮脸?如果理发师不给自己刮脸,那么他要给自己刮脸.如果他给自己刮脸,他又不应给自己刮脸.

英国的一位图书馆员G·G·贝里(Berry)发现了另一个巧妙的悖论.假设我们通过足以描述所有正整数的最少的(英语中的)音节数将所有的正整数分了类.于是,英语中的十七(sev'en'teen)这个数需要三个音节,而九十七(nine'ty-sev'en)需要四个音节.现在考虑至少需要十九个音节来描述的所有正整数的集合.该集合中必有一个需要十九个音节来描述的最小的整数.然而,我们一直把这个整数描述为“利用少于十九个音节无法描述的最小的整数”(“Least integer not describable using less than nineteen syllables”),这一描述本身是个只有十八个音节的描述!因此,不存在需要十九个音节描述的最小的整数.[3]

许多悖论之所以成为悖论,问题都出在自我参照性的描述上.因此,我们才有了包含本身为成员的集合,描述自身的描述,替自己刮脸的理发师等等悖论.这些悖论说明,我们必须在观念上对我们用来阐述数和数学的基础性概念好好作一番清理.

为全部数学寻找公理的第二个难处涉及完全性的概念.一般认为,一个完全的公理体系——诸如皮亚诺公理,应该强到足以证明或否证能在该体系内明确陈述的所有语句.对于任何一个特殊的语句,也许要花费若干年的时间才能做到这一点,但266】是,至少从理论上说,我们能够证明每个语句或是真的或是假的.这种想法被库特·哥德尔(1906—1978)彻底粉碎了;他在1930年证明,在强到足以包含算术在内的任何公理体系内,总可以找到无法证明的语句.这是著名的哥德尔不完全性定理.就是这个定理说明,不可能证明$\aleph_0$和$\aleph_1$之间是存在还是不存在另一个基数.

不完全性定理的发现,如同对角线的不可公度性的发现给毕达哥拉斯学派的打击一样,给了现代数学沉重的一击.从哲学上看,它告诉我们这样一个事实:单靠逻辑和数学的分析来揭示数的一切真理是不充分的.因此,总有一些真理要靠我们从数学的外部去发现它们.

超越20世纪

我们讲过的大部分内容,都是在描述纯粹数学家从事的跟数的概念相关的工作.不过,数的演化过程比这些专业数学家建立的理论更复杂.数是我们整个文化的一个组成部分.当数的理论在数学家们心中逐渐形成的时候,数的文化也在我们的整个社会中发展着.如果数学只有专业数学家感兴趣,而被其他社会成员所不顾,那么世界可真的会变成荒凉无趣的场所.我们的技术是靠数和数学驾驭的,两者在我们的日常生活中起着相辅相成的作用.

用什么标准来衡量我们的数学正在变得有多复杂呢?一个标准是看普通的市民使用数学的状况.按照数学教授杰里·金的说法,根据对三个全国性数学组织成员的统计,这个国家大约有五万名职业数学家.这五万名数学家每年在大约一千五百种杂

志上发表约两万五千篇数学研究论文.[4]杰里·金指出,没有一个人会去读遍这25000篇论文.其中大部分论文的遭遇,只是被杂志的评论员和作者本人读过.所以说,虽然专业数学家的人数【267】不少,每年生产出大量论文,但这些作品对其他人几乎没有直接的影响.

不过这并不表明数学中的新发现都是些故弄玄虚的,跟普通民众无关的玩意儿.那些最好的数学对我们大家都有影响,它们对数学之外的生活十分重要.在人类发展史上,有过几个关键的阶段,数学的应用成了普通民众的大事.当然,这不是说社会上的每个人都提高了他们对于数的认识,而是说民众中相当大的一部分人这样做了.公元前8500年左右,农耕业在西亚形成和发展的时期就是一例,当时普通的男人和女人都要学习计数和算帐.

另一次大发展出现在公元前3500年左右,正值城市逐渐形成的时期.当时的统治者使用书记员和祭司来从事从确定季节的变化到分配土地和劳力等项复杂的计算任务.到了大约公元前3100年,苏美尔地区发明了文字,这又大大加速了社会的进步.

公元前500年至公元100年间是希腊人经历的数学黄金时代,但普通民众的数学状况并没有发生很大的变化.算盘和算板成了流行的计算工具,而普通百姓并没能分享新发现的数学财富.

1455年出现了知识传播的良机,约翰内斯·古滕贝格(Johannes Gutenberg)发明了活板印刷术.从此,就有可能使相对廉价的图书大量面市.这有助于推动文艺复兴时期知识和思想的传播,其中包括各项科学发现和来自近东的印度—阿拉伯数系.这最终导致了我们今日的技术时代.科学和技术人员能接触到数学家的思想和方法,并应用他们的发现来解决日常生活中的问题.接着,这些专家开始以其固有的美学价值来欣赏和评价数

学.

20世纪数学中的两大成果,将再次把数学传播给普通民268】众.而最重要的成果,当属计算机的发明.

机 器 数 学

大多数专业数学家在接受和信任计算机方面步履缓慢.20世纪50年代末60年代初,在大学工作的工程师们玩计算机的兴致已经很浓,而数学家则摇着脑袋说,机器不会做证明,证明是数学家的事.不过应用数学家认识了它们的巨大效用,遂使数值分析领域来了个大飞跃.在最近的30年里,大多数数学家终于开始使用计算机了,尽管其中许多人仍感到真正的数学是靠笔和纸做出来的."计算机不会证明"的观念也受到了挑战.著名的四色定理说:只需要四种颜色就足以将任何地图着色,使得任何两个相邻的国家都着不同的颜色.这个定理早在19世纪就问世了,直到1976年才由高速电子计算机给出了证明.目前,单靠纸和笔是无法证明它的.

计算机的另外两个特征也跟我们的讨论有关.一是计算机内部使用二进制数系进行运算.计算机里进行的一切事情都始于或化为二进制数的存储、加法和减法.所以,计算机的核心乃是数.

然而,对普通民众来说,计算机最重要的特征是它能让他们来摆弄数,进行数的运算.数的重要作用上文已有阐述,但在讨论数学是什么的过程中又往往被人们所忽略.其实,对于数的痴迷常常导致纯粹数学家去认真地证明定理.许多数学发现是在数学家摆弄数的时候突然领悟到的.现在,普通百姓手里就有能用来摆弄数的很好用的计算机.除了纸和笔,我们还有纸笔根本无法代替的机器,能做许多以前无法做的事.我们可以自己提出有关数的问题,然后打开机器寻求解答.也许答案会自动地浮现59】出来.我们的前辈从没有享用过如此先进的设备.随着家用电脑

的普及，普通人已具备了以一种令人愉快的方式探讨和研究数的基本性质的能力.在计算机上进行这种探索的人必须知道一种程序设计语言，所以年轻人应该鼓起勇气去学习程序设计，以便能充分地利用这些强有力的机器.

有了计算机，数学家和非数学家就都有机会从事这类活动并得到全新的成果吗？我们已经靠计算机获得了最了不起的一个重大发现——分形理论.

上帝之眼

大多数人都见过分形（Fractal）.它们是些漂亮的彩色图案，以某种神奇的方式跟数学与天气联系在一起.用专业的术语讲，分形是些复杂的几何曲线，你无论将它们怎样放大，都不可能出现简单形式的图形.这一正在开发中的新领域以两副面孔出现：科学中的混沌理论和数学中的分形理论.但无论在科学还是数学中，目前我们了解的还只是些现象，在未来的几个世纪中，它们将改变科学与数学的面貌.

首先来关注科学.我们用数学模型描述和预测物理事件已有几个世纪的历史.行星是绕太阳作椭圆形运动的，炮弹则在空气中沿一条抛物线运动.科学在预测这类基本事件时一向十分成功.然而，当事情变得稍微复杂些，我们的数学模型就显得无能为力了.为什么，难道尽所有气象卫星和超级计算机之能，气象专家还无法预测明天的天气是晴是雨吗？是的，我们问的不是一个星期或一个月后的天气情况.我们想知道未来几天内天气的确切变化.可惜，气象学家预报一天或两天内的局部天气条件的能力出奇的糟糕.

为什么我们不用计算机来预测股票市场的变化而让自已富起来？又为什么无法描述小溪中石块周围水流形成的漩涡这种简单的事？道理很简单：自然界中的许多物理系统还无法用经典的数学来描述.我们曾经相信，我们要做的事是正确地选择一 【270】

组方程，测定所需的初始条件，于是这类问题都将迎刃而解．我们研究的自然界中为数不少的物理系统表现得相当稳定，小的扰动无碍系统的大局．以地球的运行轨道为例，我们并不担心一次地震或是一次火山爆发会使地球跑出它的轨道而飞离太阳系．活的生物体也表现出抵御变化和恢复原状的能力．在不同环境中诞生的同类动物的幼崽都会长大成相同的模样．大自然就是这样运行的．

为了讨论诸如天气这种难以对付的系统，我们要处理的方程过于复杂，直接去求精确解是不现实的，只能靠大型计算机来找出近似解．还有许多自然界中的系统也使我们企图预测其变化的良好愿望如空中楼阁．于是，科学家开始琢磨自然界中是否存在本来就是不稳定的系统，只要条件发生些微的变化，它们就会变的面目全非．结果他们发现确有大量的系统对初始条件十分敏感．事实上，它们敏感到如此程度，以至对初始条件的测量精度已不可能保证作出可靠性的预测．就拿混沌来说，我们现在已经认识到，宇宙的某些方面是极度敏感的，以至它们的行为表现出一种完全无序的状态．无论我们的数学变得多么出色，这些系统总会跑出你能预测的范围．

不过，天下并不总是坏消息．在发现混沌现象的过程中，我们还发现了这样一种系统，它虽很敏感，但是只按几条简单的法则行事，同时又能产生出极端复杂的结果．看来，大自然表现出的这种多样性和丰富性，来源于在一个敏感系统中反复应用这些简单的法则．最终的结果是无法从这些简单的法则来预测，其复杂的程度也不能从这些法则中窥见．无论是有机体如何依据简单的遗传密码生长发育，还是国民经济如何运转的问题，都跟上述现象有密切关系．混沌现象和敏感系统的发现直接得益于在计算机上模拟这些系统的努力．

271】上面所说的一切看来只跟应用数学有关．那么，计算机和自然界的那些系统又是如何影响洁白无暇的纯粹数学的呢？说来

令人吃惊，原来在抽象的思维世界中——数系就是其中一个具体的实例，也存在着自身固有的混沌．当我们把这些混沌用计算机图形画出来时，就得到了分形．它是什么样的呢？为什么有关数的精确数学原理也会包含着混沌的图象呢？直接地去体验植根于数的这种混沌无异于透过上帝的眼睛去观察．

为了让数学中的分形在计算机屏幕上显示，从而能让我们观察到这种混沌现象，办法很简单．不管什么人，只要真正理解了代数学，又会使用家用电脑，就能做到这一点．[5] 以一个简单的多项式方程 $x^3+8=0$ 为例．这个方程所蕴涵的无限复杂的细节是近 20 年内才显现出来的．这是个三阶的多项式方程，有三

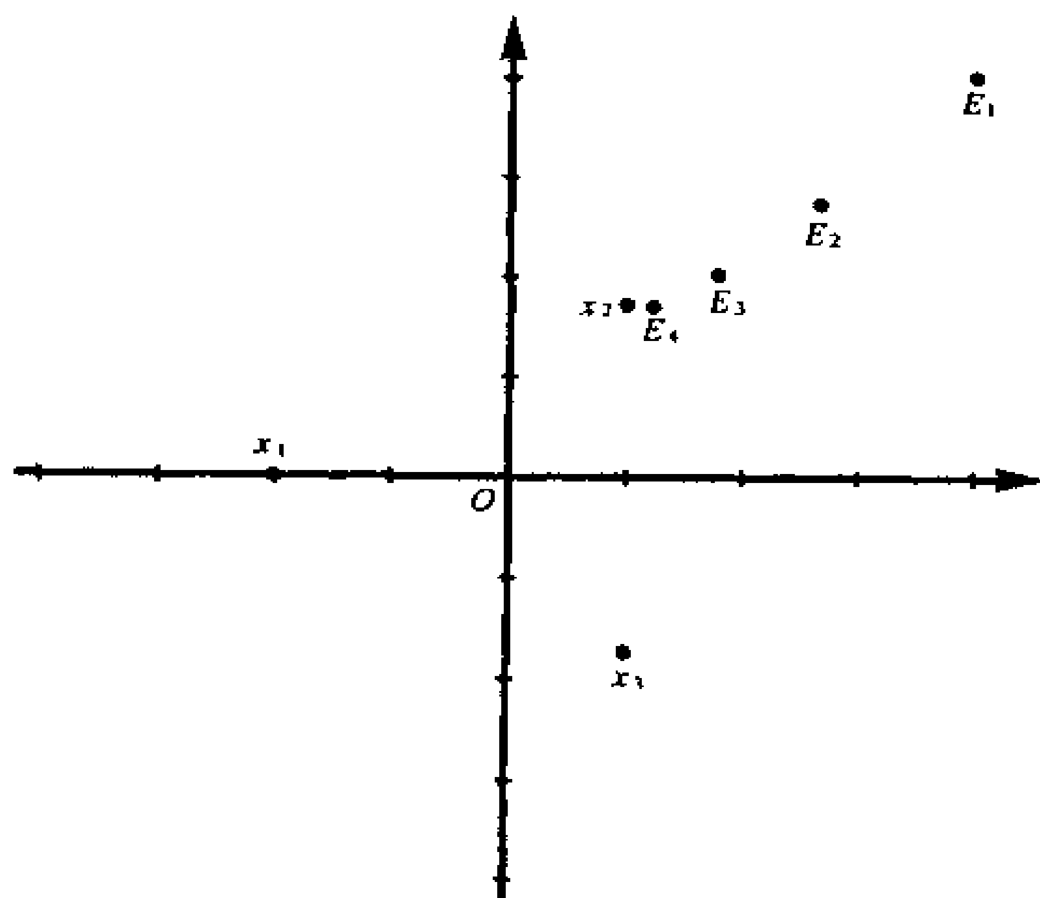


图 54 在高斯平面（或称复数平面）上标出 $x^3+8=0$ 的三个解 x_1，x_2 和 x_3．图中还标出了用牛顿法求 x_2 时得到的前四个值（E_1，E_2，E_3 和 E_4）．

个解 x_1, x_2 和 x_3. 其中有一个解恰好是有理数 -2. 当用 -2 代替 x_1, 方程变为 $(-2)^3+8=-8+8=0$. 另外两个解是复数: $x_2=1+i\sqrt{3}$ 和 $x_3=1-i\sqrt{3}$. 我们可以在复数平面上标出这三个解, 如图 54 所示.

解多项式方程有一种通用的方法——叠代法. 在使用这种方法时, 我们要定义一种算法: 先猜出解的一个值, 用该算法来计算, 算出的结果应该是个更好一些的猜测值. 接着, 用这个较好的猜测值做同样的计算, 得出第二个更接近正确解的猜测值. 继续这一过程, 直到得出一个足够接近真正解的令我们满意的答案. 有趣的是, 任何一个用来进行叠代的算法, 都具有内在的、自参照的特性; 我们在讨论悖论时遇到过这种性质: 该算法的解是该算法的另一个解. 因此, 叠代是一种映回自身的映射.

牛顿(1642—1727)可能是历史上集科学家与数学家于一身的最伟大的人物, 曾设计了一种叠代法. 对 $x^3+8=0$ 这个方程用它来叠代求解的算法如下, 其中每个猜测值用 E 表示:

$$E_2=E_1-\frac{E_1^3+8}{3E_1^2}.$$

272]

让我们从第一个估计值, 即复数 $4+4i$ (图 54 中的点 E_1) 开始叠代. 我们还记得在复数平面上标出某个复数, 相当于把它指定为一对有序的数, 对于 $4+4i$, 我们指定的那对数为 $(4,4)$. 因为 E_1 最靠近三个解中的 x_2, 所以可以想像若以它作为第一次的猜测值, 我们将一个接一个地得出越来越靠近 x_2 的估计值. 事实正是如此. 将 $4+4i$ 代入上述算法公式, 得到 $E_2=2.67+2.75i$, 它已在图 54 中标出. 好, 再将 E_2 代入公式导出 E_3, 后者又可导出 E_4. 此时我们已相当靠近正确的解 $1+\sqrt{3}i$ (近似地等于 $1+1.73i$). 于是, 一切如愿以偿. 我们从接近 x_2 的猜测值开始, 用牛顿的方法得到一串估计值, 它们收敛到 x_2.

273]

我们可以猜想, 第一个估计值 E_1 最靠近哪个具体的解 x_i,

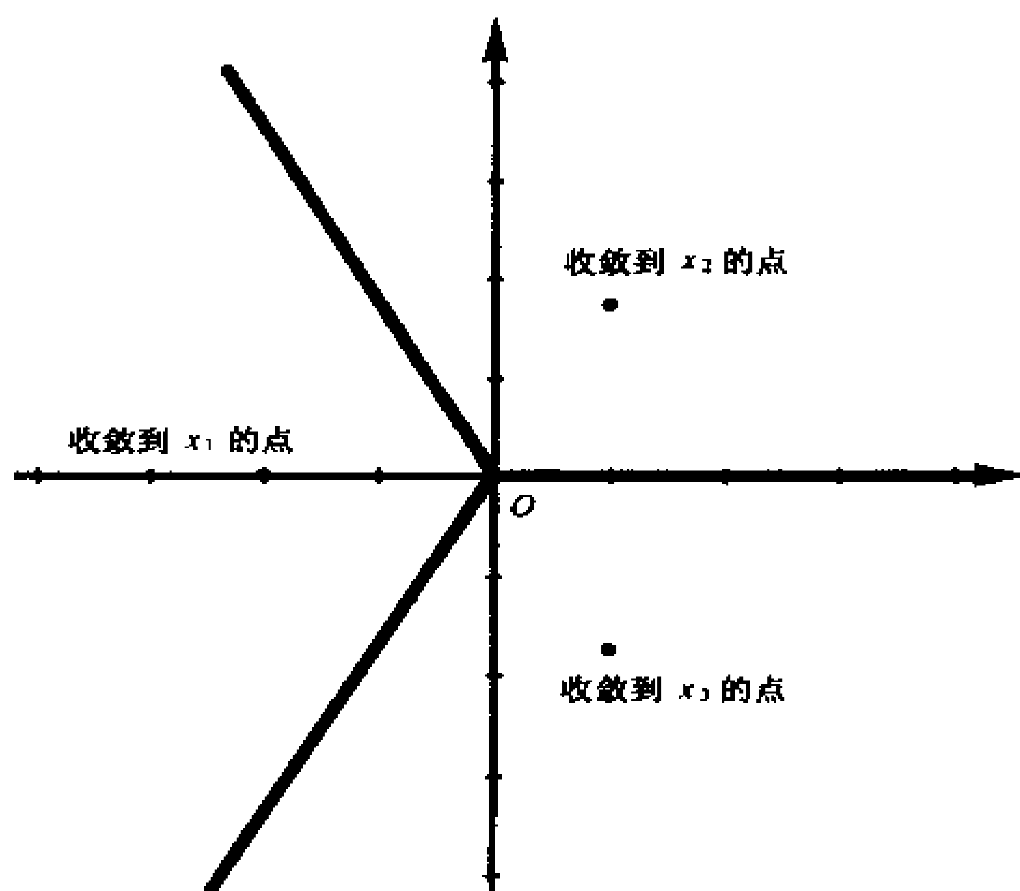


图 55 复数平面被分成三个相等的区域.用牛顿法求解时,从逻辑上可以假定最靠近代表解的点的那些点将收敛到这个解.真的是这样吗?

用牛顿法得到的那串估计值就将收敛到那个 x_i. 在图 55 中,复数平面被黑粗线分割成三个分别围绕着三个解的区域.我们还可以假设只要在含有 x_2 的区域内选取第一个估计值,无论你取的值是什么,它们最终都将收敛到 x_2.其余两个区域的情况也一样——总是收敛到离第一个估计值最近的那个解.唯一有疑问的是恰好离两个解同样远近的那些点.这个问题正是 1976 年读一年级微积分课的学生问约翰·哈伯德(John Hubbard)的问题.[6]难道最初的猜测值总是会走向离它最近的解吗?哈伯德当时不知道确切的答案,并跟学生说下个星期告诉他们.

哈伯德在一周之内没能找到令人满意的答案,他不得不求助于他的计算机.他在计算机上演算,发现在复数平面上出现了 【274】

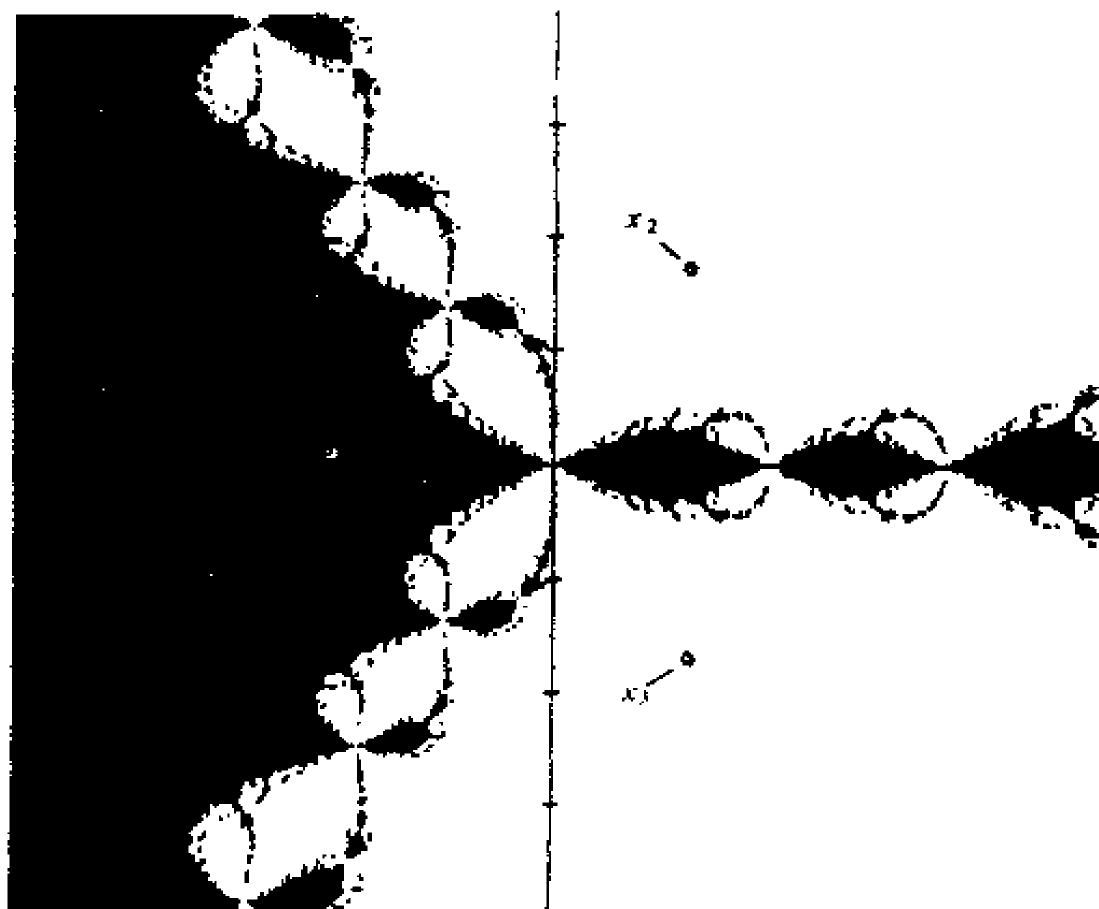


图 56 用牛顿法对复数平面上的点进行叠代运算，结果产生出一幅分形图.图中的黑色区域表示用牛顿法叠代将收敛到 x_1（图中未标明）的那些初始估计值的范围.白色区域是将要收敛到 x_2 或 x_3 的初始值的范围.考虑纵轴线右侧的黑色区域，我们可以问：它们更靠近 x_2 或 x_3，为什么叠代后却趋向 x_1 了呢？

一些非常奇怪的现象.关于猜测值收敛到最靠近的解的假设，有它对的、符合逻辑的一面，但又有它大错特错的地方.请看看图 56 吧！我们在图中画出了最终趋于 x_1 的所有那些最初的估计值的分布的范围！我们看不到不同解之间清晰的边界，有的只是一幅极端复杂的图——这就是分形图.要是我们只看其中的一小块区域，并将它放大，此时会发生什么情形呢？把细节放大解决不了问题，仍然还是那么复杂的图（图 57）.也就是说，无论把各个解之间的图象的细节放大多少倍，我们绝对得不到清晰、

简单的边界.分形所特有的卡富多彩的细节将一直保持下去,永无止境! 【275】

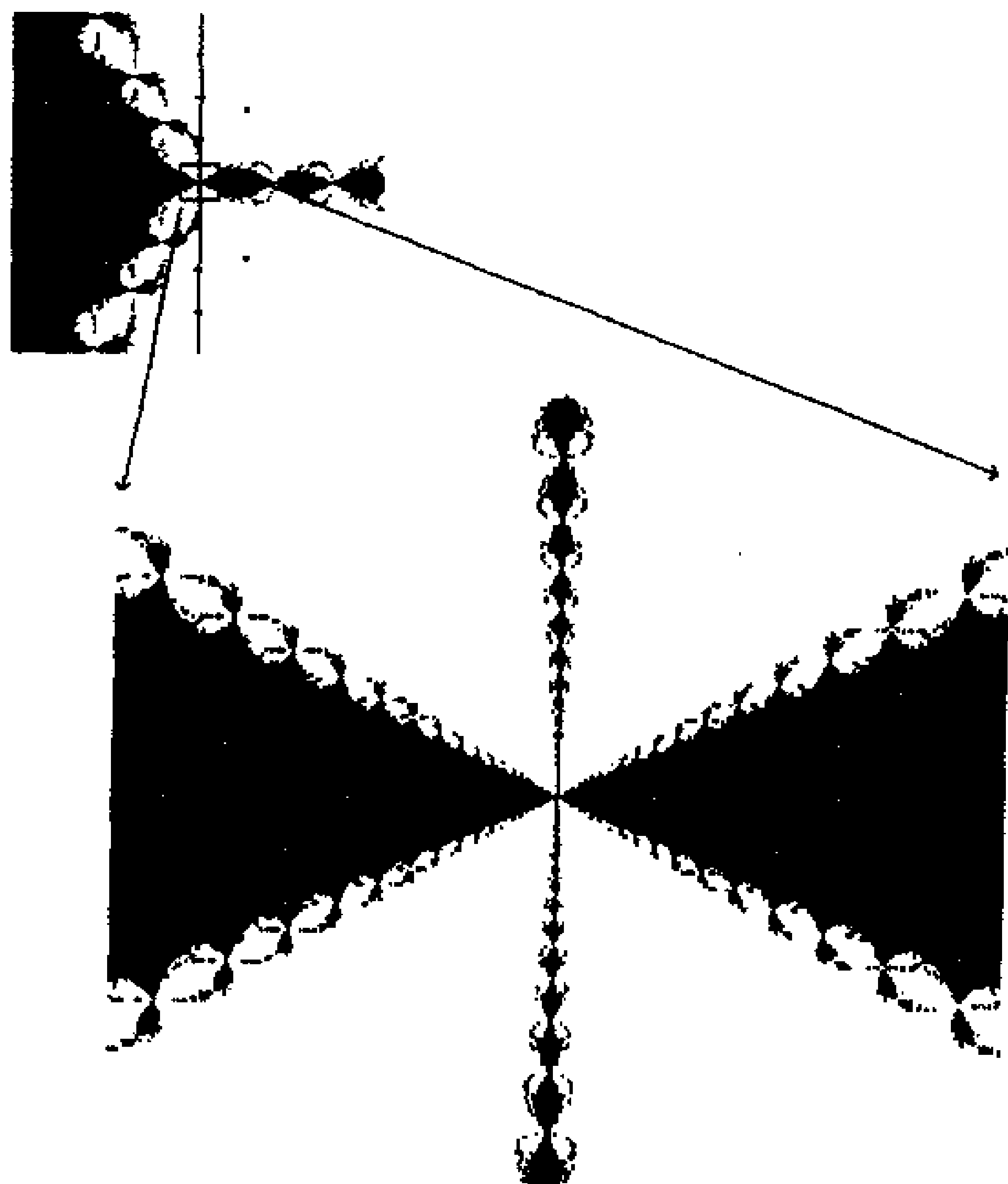


图 57 由 $x^3+8=0$ 产生的分形图经放大后,可看到更多的细节,但根本看不到稍微简单一些的图形.原来的分形图中的一小块区域放大 100 倍后,看到的是原来复杂图形的复制品. 【276】

除哈伯德之外,其他一些人也一直在研究这种出现在复数平面上的奇怪图形.最早的研究者其实是两位法国数学家加斯东·朱利亚(Gaston Julia)和皮埃尔·法图(Pierre Fatou),他们在第一次世界大战期间探索这一课题时还没有计算机,全部计算都得靠手算.他们得到的漂亮的图形(现称为朱利亚集)那时大概被人忽略了.20 世纪 70 年代,伯努瓦·曼德勃罗(Benoit Mandelbrot)开始研究朱利亚集,他在 1979 年发现了复数平面上分形图的老祖宗——曼德勃罗集.[7)]

分形图中最引人注目的特点,正如图 56 中所显示的,仍是它完全独立于在现实世界中出现的混沌.它所使用的概念只是纯粹数学的直接产物.在图 56 中,看到的是我们的数系的基本特征.为什么会有如此精细的图形?利用同样的技巧,每个次数等于或高于二次的多项式都将产生分形图.我们以 x^3+8 为例只是因为它很简单.如果说是我们发明了所有跟数学有关的概念,那么图 56 中的图形又是怎么发明的呢?

靠一种经验、一种体验,就像听一部伟大的交响乐;你坐在计算机屏幕前,看着那些彩色的多项式分形图活灵活现地在那里生长.当图形的细部出现时,就像一股电火花贯穿你的全身,你好像感到你正在观看生命成长过程中伟大的细胞分裂,领略到了存在的本质.各种分形图的发现,再次使数学家们相信:数学对象的绝对存在性.詹姆斯·格莱克(James Gleick)在他那部杰出的作品《混沌:开创新科学》①(Chaos: Making a New Science)中大胆地宣称:

> 曼德勃罗集……存在着.……在哈伯德和道阿迪(Dauady)理解它的数学本质之前,甚至在曼德勃罗发

① 该书有中译本.张淑誉译,郝柏林校.上海译文出版社出版(1990).——译注

现它之前，它就已经存在了．科学创造出复数这种架构和叠代函数这一概念后，它就存在了；然后，等待人们去揭开它神秘的面纱．也许，它的存在比这更早：当大自然开始用简单的物理定律组织自己，并以无限的耐心重复着这种努力之时，就是曼德勃罗集诞生之日．[8]

费马大定理

在告别20世纪的成就之前，我们不能不提到最近发生的一件事，它也许可以排在最杰出的数学成就之列．你还记得毕达哥拉斯数吧，那是指满足方程 $a^2+b^2=c^2$ 的整数三元组．我们知道存在无穷多个这样的三元整数组，连古巴比伦人也知道．有了毕达哥拉斯数，我们自然会接着问：是否存在三个自然数，它们的立方满足下述关系：$a^3+b^3=c^3$．【277】

彼埃尔·德·费马(Pierre de Fermat)1601年生于法国的波蒙—德洛马涅．有人认为他是17世纪最好的数学家，不过，他肯定是世界上最伟大的业余数学家之一．他在建立微积分，(独立于笛卡儿)发明解析几何和为现代数论奠基方面都做了重要工作．[9]

1637年，费马在研究丢番图的《算术》第二卷时，在书中讲述毕达哥拉斯数的页边空白处写道：

> 相反，不可能把一个立方分成两个立方，一个四次幂分成两个四次幂，一般地说，不能把高于二次的任何幂分成两个相同次数的幂：我已发现了一个真正奇妙的证明．可惜此处页边空白太窄无法写下．[10]

费马在这段话里已经回答了我们的问题，而且大大超出了我们的期望，即不仅不可能找出三个自然数满足 $a^3+b^3=c^3$，而且对于任何大于2的 n，都不可能找出三个自然数满足 a^n+

$b^n = c^n$. 这就是著名的费马大定理. 然而，费马从未给出他的证明. 许多人认为，费马是错误地以为自己有了一个证明，实际上在 1637 年还不存在证明他的定理所必须的工具. 但是有谁能确定这件事呢？事实是，从 1637 年至 1993 年，历时 356 年，居然没有一个人能证明费马大定理. 无数的专业和业余数学家都在它面前败下阵来. 我记得在犹他大学当研究生的时候，我的数学教授告诫我们，千万别傻到想去证明费马大定理，有太多的学生因迷恋这个问题而耽误了学业. 我们这批学生也并不是个个都听从了这一忠告.

在 1993 年的 6 月 21 日至 23 日的三天内，在普林斯顿大学工作的英国数学家安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)返回英国，做 [78] 了三个 1 小时的报告，题目是"模形式，椭圆曲线和伽罗华表示".[1] 从第一天起，听众就在猜测怀尔斯报告的最终结论是什么. 在第三个报告行将结束时，怀尔斯在黑板上写下了费马大定理，听众中爆发出热烈的掌声和喝彩声. 经历了 356 年的漫长岁月，终于有人给出了一个证明. 不过，这个证明经得起仔细的推敲和检查吗？我们只能拭目以待，怀尔斯还必须把他的证明投稿给杂志，以便让其他数学家来检查他的工作. 不过，当时参加听讲的人觉得没问题，怀尔斯肯定已获得了成功. 要真是这样，安德鲁·怀尔斯肯定能在数学史上占有一席之地：他攻克了数学中最困难的问题之一，他的证明将位列 20 世纪最伟大的数学成就之中①.

我们还能走多远？

现在，我们手中有了计算机和长年累月积累起来的全部数

---

① 虽然在 1993 年 6 月给出的证明中被发现存在漏洞，但经过一年的补救，怀尔斯终于在 1994 年 9 月给出了经同行专家确认是正确的证明. ——译注

学知识.我们在发现新数学的道路上还能前行多远呢？如果我们的大脑处于这样的状态：平均智力的智商大约已达到了100点，那么这种大自然赋予我们的智力还能让我们在追求更完美的数学时走多远呢？当然，要是来自银河系中心的客人来拜访我们，结果发现他们的智商高达两千点，那时我们多少会感受到他们的思维能力的威胁.我们还敢相信能理解他们的数学吗？我们会不会变得像小鸡小狗听微积分课那样，除了听到声音外什么都不懂？难道仅仅因为我们大脑构造的局限性就会存在我们无法逾越的界限吗？

假如有一天我们解开了人类的所有遗传密码，假如我们还能操纵这些密码，使我们的孩子具有令人满意的编程特性.那时我们能让孩子的智商达到200点，400点，甚至2 000点吗？他们能发现什么样的数学？不管它们是什么，我们这些老一辈的人恐怕是理解不了了.不过，我们知道那必定是庄重和优美的. 【279

各章注释

导言

1. Kathleen Freeman, *Ancilla to the Pre-Socratic Philosophers* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1966), p. 74.
2. Plato, *The Dialogues of Plato*, trans. B. Jowett (New York: Random House, 1937) *The Republic*, VII, 525

第1章

1. Karl Menninger, *Number Words and Number Symbols* (New York: Dover Publications, 1969), p.33.
2. Erich Harth, *Windows on the Mind: Reflections on the physical Basis of Consciousness* (New York: William Morrow and Company, 1982), p.101.
3. Paul Glees, *The Human Brain* (Cambridge: Cambridge University Press, 1988), p.37.
4. *Mathematical Disabilities* (Gérard Deloche and Xavier Seron, eds.) (Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 1987)
5. Paul D. MacLean, *The Triune Brain in Evolution* (New York: Plenum Press, 1990), p. 549; Deloche and Seron, p. 140.

第2章

1. Roger Lewin, *Bones of Contention: Controversies in the Search for Human Origins* (New York: Simon and Schuster, 1987), p.108.

81]

2. David Lambert, *The Field Guide to Early Man* (New York: Facts on File, 1987), pp. 98—105.
3. 同前书, p.106
4. David Eugene Smith, *History of Mathematics* (New York: Dover Publications,

1951), p.6.

5. Paul D. MacLean, *The Triune Brain in Evolution* (New York: Plenum Press, 1990), p.555.
6. Richard E. Leakey, *Origins* (New York: E.P. Dutton, 1977), p. 205.
7. Karl Menninger, *Number Words and Number Symbols*, p.35.
8. Graham Flegg, *Numbers Through the Ages* (London: MacMillan Educations LTD, 1989), p.7.
9. Graham Flegg, *Numbers: Their History and Meaning* (New York: Schocken Books, 1983), p.19.
10. Flegg, *Numbers Through the Ages*, p.9.
11. Flegg, *Numbers: Their History and Meaning*, p.24.
12. Menninger, p.11.
13. Flegg, *Numbers: Their History and Meaning*, p.11.
14. Menninger, p.32.
15. Leakey, p. 162.
16. Flegg, *Numbers Through the Ages*, p.37.
17. 同前书, p. 11.

第3章

1. Graham Flegg, *Numbers: Their History and Meaning*, p.7.
2. H. Kalmus, "Animals as Mathematicians," *Nature 202* (June 20, 1964), p.1156.
3. Levi Leonard Conant, "Counting," in *The World of Mathematics*, *Vol. 1* (James R. Newman, ed.) (New York: Simon and Schuster, 1956), p.433.
4. Donald R. Griffin, *Animal Thinking* (Cambridge, MA: Harvard University Press, 1984), p. 204.
5. O Koehler, "The Ability of Birds to 'Count'," in *The World of Mathematics*, *Vol. 1* (James R. Newman, ed.) (New York: Simon and Schuster, 1956), p.491.
6. Conant, p. 434.
7. Guy Woodruff and David Premack, "Primate Mathematical Concepts in the Chimpanzee: Proportionality and Numerosity," *Nature 293* (October 15, 1981), p.568—570.
8. 1992年11月19日,与加州大学圣克鲁斯分校退休自然史教授肯尼斯·S·诺里斯(Kenneth. S. Norris)的电话对话.
9. Menninger, *Number Words and Number Symbols*, p.11.

10. John McLeish, *Number* (New York: Fawcett Columbine, 1991), p.7.

11. David Caldwell and Melba Caldwell, *The World of the Bottle-Nosed Dolphin* (New York: J.B. Lippincott Co., 1972), p.17.

[282]

12. Carl Sagan, *Mind in the Waters* (Joan McIntyre, ed.)(New York: Charles Scribner's Sons, 1974), p.88.

第4章

1. David Eugene Smith, p.37.
2. Denise Schmandt-Besserat, *Before Writing, Vol. I: From Counting to Cuneiform* (Austin, TX: University of Texas Press, 1992), p. 7.
3. 同前书, p.6.
4. 同前书, p.190.
5. Mortimer Chambers, Raymond Grew, David Herlihy, Theodore Rabb; and Isser Woloch, *The Western Experience: To 1715* (New York: Alfred A. Knopf, 1987), p.7.
6. Schmandt-Besserat, p. 114.
7. 同前书, p. 199.
8. Carl B. Boyer, *A History of Mathematics* (New York: John Wiley and Sons, 1968), p.33.
9. H.L. Resnikoff and R.O. Wells, Jr., *Mathematics in Civilization* (New York: Dover Publications, 1973), p.76.
10. David Eugene Smith, p. 43.
11. Boyer, p.22.
12. David Eugene Smith, p.43.
13. Boyer, p.12.
14. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Vol. I* (New York: Oxford University Press, 1972), p.16.
15. Lucas Bunt, Phillip Jones, and Jack Bedient, *The Historical Roots of Elementary Mathematics* (New York: Dover Publications, 1976), p.37.

第5章

1. McLeish, p. 53.
2. David Eugene Smith, p.23.
3. Menninger, p. 452.

4. Boyer, p. 220.
5. McLeish, p. 79.
6. 同前书, p. 24.
7. Stuart J. Fiedel, *Prehistory of the Americas* (Cambridge: Cambridge University Press, 1987), p. 282.
8. 同前书, p. 281.
9. 存于德国德累斯顿市的"德累斯顿手稿"；存于西班牙马德里市的"马德里手稿"以及存于巴黎市的"巴黎手稿". [283]
10. Bunt *et al.*, p. 226.
11. Thomas Crump, *The Anthropology of Numbers* (New York: Cambridge University Press, 1990), p. 46.
12. Jacques Soustelle, *Mexico* (New York: World Publishing Company, 1967), p. 125.
13. Fiedel, p. 335.

第6章

1. Chambers *et al.*, p.40.
2. Menninger, p.272.
3. 同前书, p. 299.
4. Kline, p.28.
5. David Eugene Smith, p. 64.
6. 关于这两种不同的看法，可参见 Smith, p. 71; and Boyer, p. 52.
7. Michael Moffatt, *The Ages of Mathematics: Vol. I, The Origins* (New York: Doubleday and Company, 1977), p.96.
8. Boyer, p.60.
9. Bunt *et al.*, p.83.
10. Aristotle, *The Basic Works of Aristotle*, trans. J. Annas (Richard McKeon, ed.) (New York: Random House, 1941); *The Metaphysics*, 986a, lines 1—3 and 15—18, Oxford University Press.
11. 同前书, 1090a, lines 20—25.
12. 两个明显不同的证明选自：Stuart Hollingdale, *Makers of Mathematics* (London: Penguin Books, 1989), p. 39, and Eric Temple Bell, *Mathematics: Queen and Servant of Science* (New York: McGraw-Hill, 1951), p. 190.
13. Kline, p. 33.
14. Moffatt, p. 92.

15. Bunt *et al.*, p. 86.

第7章

1. McLeish, p. 115.
2. Kline, p. 184.
3. David Eugene Smith, p. 157.
4. Menninger, p. 399.
5. McLeish, p. 122.
6. Kline, p. 184.
7. Bunt *et al.*, p. 226.
8. 同前书,p. 227.

284】 9. Menninger, p. 425

10. 同前书,p.432.
11. 同前书,p.400.
12. Hollingdale, p.109.
13. Jane Muir, *Of Men and Numbers* (New York: Dodd, Mead, and Company, 1961), p.235.

第8章

1. Freeman, p.14.
2. 同前书, p. 19.
3. Aristotle, *The Basic Works of Aristotle*, *Physics*, *Book III*, 204b, lines 2—9.
4. Freeman, p.75.
5. Aristotle, *Physics*, *Book* Ⅲ, 206b, lines 31—32.
6. 同前书,204b, lines 6—8.
7. 同前书,206a, line 26; 206b, line 13.
8. 同前书,239b, lines 14--18.
9. Plato, *The Dialogues of Plato*, trans. B. Jowett (New York: Random House, 1937), Timeaus, lines 25, 52.
10. Rudy Rucker, *Infinity and the Mind* (New York: Bantam Books, 1982), p.3.
11. Thomas Hobbes, *Leviathan*: *Parts I and II* (New York: Bobbs-Merrill Company, 1958), p.36.
12. Thomas Hobbes, "Selections from the De Corpore." in *Philosophers Speak for Themselves*: *From Descartes to Locke* (T. V. Smith and Marjorie Grene, eds.) (Chicago:

University of Chicago Press, 1957), p.144.

13. René Descartes, "Meditations on First Philosophy."in *Philosophers Speak for Themselves: From Descartes to Locke*, p.78.
14. Hollingdale, p. 359.
15. Rucker, p.88.
16. Euclid, *Elements*, *Book III* (New York: Dover Publications, 1956), Sec. 14.

第 9 章

1. 良序集是一种简单的有序集.它的每个子集都有一个首元素.参见策梅罗的选择公理.
2. Sir Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, *Vol I* (Oxford, England: The Clarendon Press, 1960), p. 385.
3. 此论文的英译本可参见:Richard Dedekind, *Essays on the Theory of Numbers* (La Salle, IL: Open Court Publishing Company, 1948).
4. 同前书, p. 6.
5. 同前书, p. 12.
6. 同前书, p. 13.
7. 同前书, p. 15
8. Boyer, p. 307.
9. 同前书, p. 348.
10. Richard Preston, "Profiles: The Mountains of Pi," *The New Yorker* (March 2, 1992), p.36.

[285]

第 10 章

1. Hollingdale, p. 275.
2. Boyer, p. 361.
3. Muir, p. 217.
4. 引自 Sherman K. Stein, *Mathematics: The Man-Made University*, (New York: W. H. Freeman and Company, 1963), p. 252.
5. 同前书, p. 253.
6. Joseph Warren Dauben, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1979), p.50.
7. Leo Zippin, *Uses of Infinity* (Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1962), p. 56.

第 11 章

1. Kline, p. 143.
2. 同前书,p.253.
3. Eric Temple Bell, *Men of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1965), p.35.
4. Hollingdale, p.126.
5. Bell, *Men of Mathematics*, p.43.
6. Muir, p. 172.
7. Dauben, p. 54.
8. 同前书,p. 55.
9. Hollingdale, p.337.

第 12 章

1. E.Kamke, *Theory of Sets* (New York: Dover Publications, 1950), p.47
2. Rucker, pp. 48—50.

286] 3. Dauben, p. 232.

4. Rucker, p. 276.
5. 同前书,pp. 281—285.
6. Muir, p. 237.
7. Dauben, p. 285.
8. 同前书,p. 243.

第 13 章

1. Steven B. Smith, *The Great Mental Calculators* (New York: Columbia University Press, 1983).
2. Darold A. Treffert, *Extraordinary People* (New York: Harper & Row Publishers, 1989).
3. Steven B. Smith, p. 97.
4. 同前书,p. 289.
5. 同前书,p. 245.
6. Oliver Sacks, *The Man Who Mistook His Wife for a Hat* (New York: Harper Perennial. 1985), p.203.
7. Treffert, p. 41.

8. W.W. Rouse Ball, "Calculating Prodigies," in *The World of Mathematics, Vol. I*, p.467.
9. Steven B. Smith, p. xv.
10. Treffert, p. 220.
11. 同前书,p.222.
12. A.E. Ingham, *The Distribution of Prime Numbers* (Cambridge: Cambridge University Press, 1990), p.3.

第14章

1. Bertrand Russell, *The Problems of Philosophy* (London: Oxford University Press, 1959), p. 12.
2. George Berkeley, "Three Dialogues Between Hylas and Philonous," in *Philosophers Speak for Themselves: Berkeley, Hume, and Kant*, pp.1—95.
3. Russell, p. 98.
4. Jerry p. King, *The Art of Mathematics* (New York: Plenum Press, 1992), p. 29.
5. 同前书,p. 43.
6. 同前书,p. 139.
7. W. H. Werkmeister, *A Philosophy of Science* (Lincoln, NE: University of Nebraska Press, 1940), p. 141.

[287]

第15章

1. Boyer, p.645.
2. E.J. Borowski and J.M. Borwein, *The HarperCollins Dictionary of Mathematics* (New York: HarperCollins Publishers, 1991), p.589.
3. 同前书,p. 49.
4. King, p. 6.
5. Roger T. Stevens, *Fractal: Programming in Turbo Pascal* (Redwood City, CA: M&T Publishing, 1990).
6. James Gleick, *Chaos: Making a New Science* (New York: Viking Penguin, 1987), p. 217.
7. 同前书,p.222.
8. 同前书,p.239.
9. Bell, *Men of Mathematics*, p. 57.
10. 同前书,p.71.

11. Michael D. Lemonick, "*Fini* to Fermat's Last Theorem," *Time* (5 July 1993), p.47.

288】

名词解释

算盘（abacus）：一种古代的计算工具.它是由一根根穿着珠子的细杆固定在一木框中构成的.通过沿着细杆移动珠子来进行计算.

绝对无限（absolute infinite）：是一种实体，它等同于由所有无限组成的汇集，有时认为它与上帝同在，记为Ω.是个不能被人的理性真正理解的神秘概念.

绝对值（absolute value）：一个数（不计原来的符号）的正值.

亚历山大数系（Alexandrian number system）：基于27个不同数码的希腊数系，公元前100年后曾在使用中占支配地位.也称为爱奥尼亚数系.

代数数（Algebraic number）：一种数，它是系数全为有理数的多项式的解.

解析几何（Analytic geometry）：一种用数字坐标表示位置，并在其中使用代数方法的几何.

雅典数系（Attic number system）：一种早期的、书写用的希腊数系，它基于6个基本的数码，在公元前100年以前使用，亦称为Herodianic数系.

体位计数（body-counting）：手指计数的延伸，用身体的不同部位表示自然数.

婆罗米数码（Brahmi numerals）：从数1到数9的印度数

码，它早在公元前 3 世纪就已使用，这些符号最后演变成今天所用的印度—阿拉伯数码.

[289] 基数 (cadinal number)：描述一个集合中有多少个元素的数.

笛卡儿坐标系 (Cartesian coordinate system)：使用两条互相垂直的数线使得平面上每个点等同于两个实数的体系.

封闭数(集) (closed numbers)：称一个数集在某种运算下是封闭的，意指：每次用此数集中的数作这种运算都会得到该数集中的另一个数.

聚点 (cluster point)：极限的别称，特别指在出现一个以上的极限时使用.

复数 (complex number)：形如 (a,b) 或 $a+bi$ 的数，其中 a,b 都是实数，i 是 $\sqrt{-1}$. 实数与虚数都是复数的子集.

合数 (composite number)：是一种自然数，可以被 1 和自身之外的数除尽.

具体的计数 (concrete counting)：使被计数的对象一对一地与计数用的证物或符号相对应的计数法.

连分数 (continued fraction)：该数由一个整数加上一个分数组成，这个分数的分母也是由一个整数加上一个同类的分数组成. 每个无理数可表为一个无限的连分数.

构造主义 (constructivism)：一种信念，认为数学对象不能独立于人的思想而存在.

连续统假设 (continuum hypothesis)：认为在 $\aleph_0$ 和 $\aleph_1$ 之间还存在一个超限数的假设. 此假设是不可判定的.

收敛 (convergence)：数的无穷序列或数的级数趋近于极限的状态.

坐标 (coordinates)：解析几何中对应于平面上一个点的两个实数.

可数集(合) (countable set)：指一种无限点集，它可以和

自然数建立起一对一的映射关系，也称为可列的(enumerable)集合.

计数 (counting)：找出一个集合的基数.

算板 (counting board)：古代的计数工具，由一块带标记的板和用于计数的小棍或小石头组成.

稠密性 (dense)：指在任两个数中间存在另一个数的性质.有理数，无理数，实数，复数都具有稠密性.

不可数集 (denumerable set)：不可能一对一地映射为自然数的集合，参见可数集.

[290

数字 (digit)：印度—阿拉伯数系的十个数码 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 中的任何一个.

发散 (divergence)：数的无穷序列或数的级数的无界或无极限的状态.

元素 (element)：集合中特指的一项或数.

欧几里得几何 (Euclidean geometry)：由欧几里得发展起来的一种几何.它满足下列平行公设：给定一直线和不在直线上的一点，过这点有且仅有一条与原给直线平行的直线.

指数 (exponent)：写在一个数(即底数)的右上角的数，表明第一个数所升高的幂次.

可扩张基数 (extendable cadinal number)：目前所知的最大基数.

阶乘 (factorial)：小于或等于某个给定的自然数的所有自然数之乘积.用放在给定自然数后面的符号“!”表示，例如 $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

试位法 (false position)：解方程的一种方法，使用一个猜测值代入方程并得到一个改进的猜测值.

斐波那契序列 (Fibanacci sequence)：从 1 开始的一个数的序列，其中每一项都是它前面两项之和，此数列前七项是 1,1,2,3,5,8,13,…

手指计数法 (finger-counting)：以手指与一个集合中的对象相对应的用以计数的方法.

5 元计数制 (five-counting, 5-counting)：一种早期的以 5 为基底的计数法.

分形 (fractal)：一种复数平面上的几何曲线，无论怎样放大仍不会出现简单的图形.这种曲线的维数一般在两个整数之间.

古柏数码 (Gubar numerals)：公元 9 世纪时阿拉伯人使用的数码，从早期印度婆罗米数码演变而来.

黄金分割 (golden mean)：或黄金比 (golden ratio)：$(1+\sqrt{5})$ 与 2 的比或记作分数 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 为希腊人所发现，出现在大量的数学关系中.

僧侣文 (hieratic writing)：早期埃及书记员使用的文字，用于记录日常活动.

象形文字 (hieroglyphics)：早期埃及人在正式活动或纪念性建筑上使用的文字.

291】 印度－阿拉伯数系 (Hindu-Arabic number system)：现今普遍使用的数系，基于十个独特的符号——0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，并使用位值制.

超复数 (hypercomplex number)：将数的概念扩张到维数高于二维复数而生成的一类数，参见四元数.

超不可达超限数 (hyperinaccessible transfinite number)：一种超限数，它的不可达性无法从较小的超限数出发加以定义，参见不可达超限数.

斜边 (hypotenuse)：在一直角三角形中直角所对的边.

虚数 (imaginary number)：复数平面上位于竖轴上的数，即形如 ai 的数，其中 a 为实数，i 为 $\sqrt{-1}$.

不可达超限数 (inaccessible transfinite number)：一种超限

数，它不能用较小的超限数来定义.

不可公度的（incommensurable）：当两个量不可表成两个整数之比时称它们为不可公度的.

不定方程（indeterminate equation）：有无限多个解的方程，例如 $x+y=7$. 这种方程在大量物理系统的研究中很有用.

间接证明法（indirect method of proof）：在各种古代社会中都发现过的一种证明方法. 人们先假定跟要证明的结果相反的结论成立，然后导出矛盾. 这种方法又称反证法.

无限（infinite）：亦称无穷，表示没有界，无界，不是有限的. 对集合来说，能将自身映射为它的真子集的集合就是无限集. 例如，自然数的集合可映射为自然数的平方组成的集合.

整数（integer）：含有正、负自然数和零的数集中的数.

直觉主义（intuitionism）：一种信念，认为数学不应讨论无限集，只容许使用包含有限步骤的证明或作图.

无理数（irrational number）：实数直线上的一种数，它不可表为两个整数之比.

极限（limit）：称序列 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 具有极限 L，如果对任意正值 ε，存在一个数 N，使得对所有的 $n>N$，都有 $L-A_n$ 的绝对值小于 ε.

线性方程（linear equation）：所有未知量的指数都等于 1 的方程.

[292]

刘维尔数（Liouville number）：形如 $\frac{a_1}{10^{1!}}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots$ 的超越数，其中那些 a 是 0 到 9 范围内的整数.

对数（logarithm）：是指这样的指数，对被称为底数的数必须升高与该指数相等的幂次，才能得出某给定的数. 以 a 为底 n 的对数记为 $\log_a n$. 例如 $\log_{10}100=2$，亦即 $10^2=100$.

逻辑斯蒂（logistic）：古希腊的一种计算术，是为经商而非智力追求所用.

穷竭法 (method of exhaustion): 古希腊人开发的一种技巧,用于计算由弯曲的几何形状所围成的图形的面积.这种技巧通过计算曲线图形内的矩形和三角形的面积以不断地得到更好的近似值.

新2元计数法 (neo-2-counting): 一种早期的计数方法,它使用等价于"1"和"2"的两个数词及其结合体,并进行加法、减法和乘法.

非欧几里得几何 (亦简称非欧几何,non-Euclidean geometry) 用另外的公设代替欧几里得的第五公设而形成的几何.参见欧几里得几何.

非位值制数系 (nonpositional number system): 数码的位置无助于确定其值的任何一种数系.因此,一个数中的数码可以用任何一种次序写出,而不会改变该数的值.

正规数 (normal number): 一种数,在其十进小数展开中0到9这十个数字的分布是均匀的.一个绝对正规数是指该数在任何基底下的小数展开中每个数字都以同样的比例出现.

数域 (number field): 任一实数或复数的集合,其中两数的和,差,积和商(除去0做除数)都是该集合中的另一个数.因此,数域在四种运算下都是封闭的.

数的直线 (或简称数线,number line): 一条无限的直线,线上每一点恰与一个实数相对应.

数之数 (number-number): 以自然数依次写下的一个十进小数,如0.123 456 789 101 112 13….

数的序列 (简称数列,number sequence) 称一组数 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots$ 构成一个序列,是指这些数已经按次序排好,其下 [93] 角标恰是按自然数顺序排列的.

数的级数 (number series): 一组数的总和.

数论 (number theory): 对自然数及其关系进行抽象的学问.

数码 (numeral)：代表一个数或代表数中一位数字的书写符号.

数值分析 (numerical analysis)：利用计算机及算法去逼近复杂问题的解的方法.

一对一的映射 (one-to-one mapping)：从一个集合(如一些数词)中指定一个且仅一个元素与第二个集合(如一些手指)中的每一个元素对应.

本体论 (ontology)：关于存在的含义的研究.

序数 (ordinal number)：特指一个元素在集合中的相对位置的数.

原点 (origin)：数的直线中表示 0 的点，或者是复平面中两条坐标轴相交的点.

悖论 (paradox)：在直观上可接受的前提下进行的有效推导，结果得出自相矛盾的结论.这样的论证称为悖论.

完全数 (perfect number)：其因子之和等于自身的自然数. 6 是自然数中第一个完全数，因为 $6 = 1 + 2 + 3$；28 是第二个完全数，$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

多项式方程 (polynomial equation)：由一个或多个未知数的幂次乘以称为系数的数所组成的方程.一个未知数 x 的多项式方程的一般形式为：$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

位值制数系 (positional number system)：一种数系，它要同时考虑数码原来的值与它在数中的位置才能最终得出该数码在数中的值.现代的印度－阿拉伯数系就是位值制数系.

素数 (也常译为质数，prime number)：只能被其自身和 1 整除的自然数.

射影几何学 (projective geometry)：数学中的一个分支.研究几何图形在被投影到另一个不同的空间时保持不变的那些性质.

证明 (proof)：一系列的逻辑推导，用以建立基于一组公理

之上的结论的真理性．最早的十分清晰的证明是希腊人在证明 294］某些几何关系时给出的．

毕达哥拉斯数（Pythagorean number）满足毕达哥拉斯定理的任何由三个自然数组成的一组数．例如三元数组 3，4，5 就是毕达哥拉斯数，因为 $3^2+4^2=5^2$．

毕达哥拉斯定理（Pythagorean theorem）：在一个直角三角形中斜边长度的平方等于两直角边长度平方之和，即 $a^2+b^2=c^2$，其中 c 是斜边的长度，a 和 b 分别是两直角边的长度．

四元数（quaternion）：形如 $a+bi+cj+dk$ 的数，其中 a，b，c，d 是实数，i，j，k 是超复数，满足 $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$．

结绳语（quipu）：一组打了结的绳子，美洲的印加人曾用于记录财产和交易活动．

有理数（rational number）：可表为两个非零整数之比的任一数①．

实数（real number）：所有对应于数的直线上的点的数．代数数与超越数之总和②．

修辞代数（rhetorical algebra）：一种古代形式的代数，其中所提的问题通常是用语言而非专门符号表述的．

根（root）：满足方程的数．即当用它代替未知数代入方程时，等号两边在数值上相等．

俄国农夫法（Russian peasant method）：最初是早期埃及人用来作乘法的方法．通过不断地将一个数加倍，然后加上一个适当的倍数而得出答案．后来为中欧人所使用．

集合（或简称集，set）：一些物件或元素的汇集．

---

① 此说不确，作者实际上将 0 排除在了有理数之外．正确的说法是：可表为两个整数（第二个整数不为零）之比的任一数．——译注

② 此说不对，代数数与超越数的总和是复数，实数应为有理数和无理数的总和．——译注

六十进位制数系（sexagesimal number system）：以 60 为基底的数系．与我们以 10 为基底的印度－阿拉伯数系不同．

单序的（simply ordered）：称一个数系是单序的，是指对集合中的任意三个数 x,y,z，有下列条件成立：(1) $x=y$，或 $x<y$，或 $y<x$，(2)如果 $x<y$ 且 $y<z$，则 $x<z$．实数集是单序的，而复数集不是．

联立线性方程组（simultaneous linear equations）：两个或多个方程，每个方程含有一个或多个未知数，每个未知数的幂次都是 1．

平方数（square number）：等于某个自然数的平方的自然数．例如 4 与 9 是平方数，因为它们分别等于 2 和 3 的平方．

小棍计数（stick-counting）：无须使用语言的一种计数方法．将用于计数的物体如小棍或卵石等，与被计数的对象一一对一地对应起来．

瞬感（subitizing）：直接感知一组物件有多少的能力．

符号代数（symbolic algebra）：指使用明确定义的符号而不使用普通语言来表述的代数．

词中省略代数（syncopated algebra）：处于修辞代数与符号代数之间的一种代数．它混合使用符号与普通语言来进行代数的表述．

标码数（tag number）：用来代替名称的数．

签筹（tally stick）：一根小棍，被分成等长的两部分．上面有刻痕以记录钱财帐．当这两部分放在一起时，刻痕应完全吻合．

定理（theorem）：从公理或其他定理演绎出的陈述或公式．

证物（token）：在公元前 8500 年到前 3000 年间西亚人计数时使用的小陶器，用于记录某种物品的集合的基数．

超越数（transcendental number）：不能作为系数为有理数

的多项式的根的实数或复数.即那些不是代数数的数.

超限数 (transfinite number): 无限集合的基数或序数.

三角学 (trigonometry): 研究三角形的边长与其内角的大小间关系的学问.

二元计数法 (two-counting, 或 2-counting): 一种早期的计数法,使用等价于"1"和"2"的两个数词及它们的结合体.

不可数的 (uncoutable): 称一个无限集是不可数的,如果其元素不能一对一地映射到自然数上去.

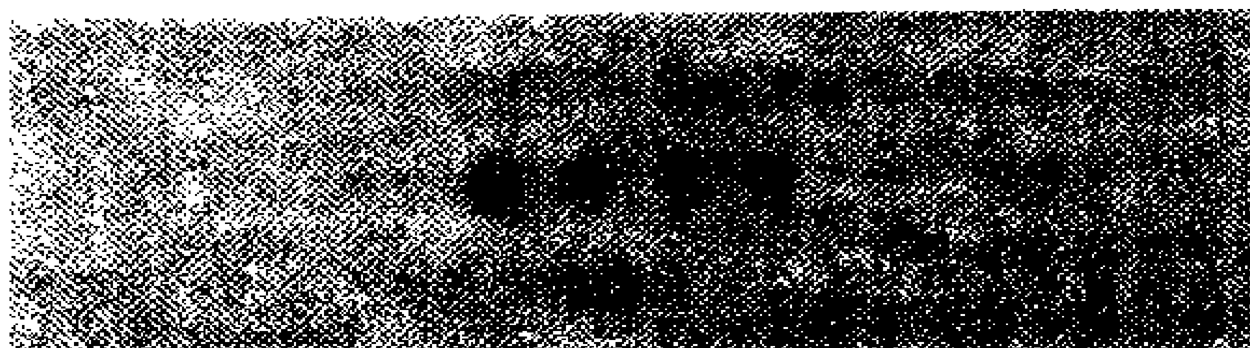
不可判定的 (undecidable): 在一个形式化的数系或逻辑体系内,依据该体系的公理无法证明也不能否证的命题,称为不可判定的命题.

单分数 (unit fraction): 形如$\frac{1}{n}$的分数,即分子是 1 的分数.

二十进位制数系 (vigesimal number system): 一种基底为 [296] 20 的数系,与基底为 10 的印度-阿拉伯数系不同.

良序的 (well-ordered): 一个集合是良序的,是指它的每个子集(包括其自身)都有一个首元素.空集被认为是良序的.

零 (zero): 空集的基数;虽然是代表无的符号,但在位值制 [297] 数系中有占位的作用,也表示数码 0.



Aristotle. *The Basic Works of Aristotle* (Richard McKeon. ed.). New York: Random House. 1941.

Bell, Eric Temple. *The Magic of Numbers*. New York: Dover Publications. 1974.

Bell, Eric Temple. *Men of Mathematics*. New York: Simon & Schuster, 1965.

Bell, Eric Temple. *Mathematics: Queen and Servant of Science*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1951.

Borowski. E.J., and Borwein. J.M., *The HarperCollins Dictionary of Mathematics*. New York: HarperCollins Publishers, 1991.

Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons, 1968.

British Museum (Natural History), *Man's Place in Evolution*. London: Cambridge University Press (undated).

Bunt, Lucas; Jones, Phillip; and Bedient. Jack, *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications. 1976.

Burgess, Robert E. *Secret Languages of the Sea*. New York: Dodd, Mead. and Comopany, 1981.

Caldwell, David, and Caldwell, Melba. *The World of the Bottle-Nosed Dolphin*. New York: J.B. Lippincott Company, 1972.

Calvin, William H., *The Ascent of Mind: Ice Age Climates and the Evolution of Intelligence*. New York: Bantam Books, 1990.

Chambers. Mortimer; Grew, Raymond; Herlihy, David; Rabb, Theodore; and Woloch, Isser. *The Western Experience: to 1715*. New York: Alfred A. Knopf. 1987.

Crump, Thomas. *The Anthropology of Numbers*. New York: Cambridge University Press, 1990.

Dauben. Joseph Warren, *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton. New Jersey: Princeton University Press. 1979.

Dedekind, Richard *Essays on the Theory of Numbers*. La Salle, Illinois: Open Court Publishing Company, 1948.

Deloche, Gérard, and Seron, Xavier (eds.), *Mathematical Disabilities: A Cognitive Neuropsychological Perspective*. London: Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

[299]

de Villiers, peter A., and de Villiers, Jill G., *Early Language*. Cambridge: Harvard University Press, 1979.

Euclid. *Elements*. New York: Dover Publications, 1956.

Fiedel, Stuart J., *Prehistory of the Americas*. New York: Cambridge University Press, 1987.

Flegg, Graham, *Numbers: Their History and Meaning*. New York: Schocken Books, 1983.

Flegg, Graham, *Numbers Through the Ages*. London: MacMillan Education LTD, 1989.

Freeman, Kathleen, *Ancilla to the Pre-Socratic Philosophers*. Cambridge: Harvard University Press, 1966.

Gillings, Richard, *Mathematics in the Time of the Pharoahs*. New York: Dover Publications, 1972.

Gless, Paul, *The Human Brain*. New York: Cambridge University Press, 1988.

Gleick, James, *Chaos: Making a New Science*. New York: Viking Penguin, 1987

Griffin, Donald R., *Animal Thinking*. Cambridge: Harvard University Press, 1984.

Hadamard, Jacques *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. New York: Dover Publications, 1945

Harth, Erich, *Windows on the Mind: Reflections on the Physical Basis of Consciousness* New York: William Morrow and Company, 1982

Heath, Sir Thomas, *A History of Greek Mathematics*. London: Oxford University Press, 1921.

Hobbes, Thomas, *Leviathan: Part I and II*. New York: Bobbs-Merrill Company, 1958.

Hollingdale, Stuart, *Makers of Mathematics* London: Penguin Books, 1989.

Huntley, H.E., *The Divine Proportion*. New York: Dover Publications, 1970.

Ingham, A.E., *The Distribution of Prime Numbers*. New York: Cambridge University Press, 1990.

Jame, Glenn, and James, Robert, eds., *Mathematics Dictionary*. New York: D.Van Nostrand Company, 1959

Jaynes, Julian, *The Origin of Consciousness in the Breakdown of the Bicameral Mind*. Boston: Houghton-Mifflin Company, 1976.

Kalmus, H., "Animals as Mathematicians," *Nature 202* (June 20, 1964.)

Kamke, E., *Theory of Sets*. New York: Dover Publications, 1950.

King, Jerry P., *The Art of Mathematics*. New York: Plenum Press, 1992.

Kline, Morris, *Mathematics: A Cultural Approach*. Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1962.

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Vol. 1* New York: Oxford University Press, 1972.

Knopp, Konrad, *Infinite Sequences and Series*. New York: Dover Publications, 1956.

Kroner, Stephan, *The Philosophy of Mathematics*. New York: Dover Publications, 1968.

Kosslyn, Stephen M., and Koenig, Oliver, *Wet Mind: The New Cognitive Neuroscience*. New York: The Free Press, 1992.

Lambert, David, *The Field Guide to Early Man*. New York: Facts on File Publications, 1987.

Leakey, Richard E., *Origins*. New York: E. P. Dutton, 1977.

Lemonick, Michael D., "*Fini* to Fermat's Last Theorem," *Time*, 5 July 1993, p.47. [300

Lewin, Roger, *Bones of Contention: Controversies in the Search for Human Origins*. New York: Simon and Schuster, 1987

Lumsden, Charles J., and Wilson, Edward O., *Promethean Fire: Reflections on the Origin of the Mind*. Cambridge: Harvard University Press, 1983.

MacLean, Paul D., *The Triune Brain in Evolution*. New York: Plenum Press, 1990.

McLeish, John, *Number*. New York: Fawcett Columbine, 1991.

Menninger, Karl, *Number Words and Number Symbols: A Cultural History of Numbers*. New York: Dover Publications, 1969

Moffatt, Michael, *The Ages of Mathematics, Vol. 1, The Origins*. New York: Doubleday & Company, 1977.

Muir, Jane, *Of Men and Numbers*. New York: Dodd, Mead, & Company, 1961.

Newman, James, ed., *The World of Mathematics*. New York: Simon and Schuster, 1956.

Newsom, Carroll, *Mathematical Discourses*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964.

Niven, Ivan, *Numbers: Rational and Irrational*. Washington, D.C.: The Mathematical Association of America, 1961.

Ottoson, David, *Duality and Unity of the Brain*. New York: Plenum Press, 1987.

Pappas, Theoni, *The Joy of Mathematics*. San Carlos, CA: World Wide Publishing / Tetra, 1989

Peter, Rozsa, *Playing with Infinity*. New York: Dover Publications, 1961.

Plato. *The Dialogues of Plato*, trans. B. Jowett. New York: Random House, 1937.

Preston, Richard. "Profiles, The Mountains of Pi," *The New Yorker* (March 2, 1992).

Resnikoff, H.L., and Wells, R.O., Jr., *Mathematics in Civilization*. New York: Dover Publications, 1984.

Robins, Gay, and Shute, Charles, *The Rhind Mathematical Papyrus*. New York: Dover Publications, 1987.

Rucker, Rudy, *Infinity and the Mind*. New York: Bantam Books, 1982.

Russell, Bertrand. *The Problems of Philosophy*. London: Oxford University Press, 1959.

Sacks, Oliver, *The Man Who Mistook His Wife for a Hat*. New York: Harper Perennial, 1985.

Sagan, Carl, *Mind in the Waters*, ed. Joan McIntyre. New York: Charles Scribner's Sons, 1974.

Schmandt-Besserat, Denise, *Before Writing, Vol. I: From Counting to Cuneiform*. Austin, TX: University of Texas Press, 1992

Schmandt-Besserat, Denise, "The Earliest Precursor of Writing," *Scientific American* (June 1978).

Smith, David Eugene, *History of Mathematics, Vol. I*. New York: Dover Publications, 1951.

Smith, Steven B., *The Great Mental Calculators*. New York: Columbia University Press, 1983.

Smith, T. V., and Grene, Marjorie, eds., *Philosophers Speak for Themselves: From Descartes to Locke*. Chicago: University of Chicago Press, 1957.

Soustelle, Jacques, *Mexico*. New York: World Publishing Company, 1967.

Stein, Sherman K., *Mathematics: The Man-Made Universe*. San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1963.

Treffert, Darold A., *Extraordinary People: Understanding Idiots Savants*. New York: 301} Harper & Row Publishers, 1989.

Werkmeister, W. H., *A Philosophy of Science*. Lincoln, NE: University of Nebraska Press, 1940.

Whitehead, Alfred North, and Russell, Bertrand, *Principia Mathematica*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1950.

Winick, Charles, *Dictionary of Anthropology*. Totowa, NJ: Littlefield, Adams, and Company, 1970.

Woodruff, Guy, and Premack, David, "Primitive Mathematical Concepts in the Chimpanzee: Proportionality and Numerosity," *Nature 293* (October 15, 1981).

Zaslavsky, Claudia, *Africa Counts*. New York: Lawrence Hill Books, 1973.

Zippin, Leo, *Uses of Infinity*, Washington, D. C.: The Mathematical Association of America, 1962.

[302

索 引



